D.M n° 8 pour le 07/01/2011

Le sujet comporte 4 pages

N . B : Le sujet comprend 3 parties, qui ne sont pas indépendantes.
Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.
On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.

Préambule :

Dans toutes les parties, étant donné une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et un réel a, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a \text{ , et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

On appelle alors E l'ensemble des réels a tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente, et F l'ensemble des réels a tels que la série $\Sigma\, u_n$ soit convergente.

Partie I :

1°) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$$

a) Montrez que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Examinez la réciproque.

b) Montrez que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et précisez alors sa limite.

Réciproquement, si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

2°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers zéro. On suppose qu'il existe deux réels m et α tels que :

$$m \neq 0,\ \alpha > 1, \text{ et } \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$$

a) Quel est le signe de m ?

b) Soit β un réel, et v_n la suite définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(u_{n+1})^\beta} - \frac{1}{(u_n)^\beta}$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie non nulle pour une et une seule valeur β_0 de β, que l'on exprimera en fonction de α .

c) On suppose que $\beta = \beta_0$, et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k$$

Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la forme :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L\, n^s$$

où on exprimera les réels L et s en fonction de m et α.

En déduire la nature de la série $\Sigma\, u_n$, en fonction du réel α.

3°) Applications :

a) On suppose que la fonction f est définie par :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x) = x - x^2$$

Déterminer l'ensemble E.

Déterminer l'ensemble F (on pourra utiliser les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies au 2°), avec $\alpha = 2$).

b) On suppose que la fonction f est définie par :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{|x|}}$$

Déterminer l'ensemble E.

Déterminer l'ensemble F (on pourra utiliser les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies au 2°) , avec une valeur convenable de α).

Partie II : Dans cette partie, on suppose que la fonction f est dérivable sur un voisinage de 0.

1°) Montrer que si l'ensemble F est non vide, alors, f vérifie la condition :

$$f(0) = 0$$

On suppose cette condition réalisée dans toute la suite de cette partie.

2°) **a)** On suppose que :

$$|f'(0)| < 1$$

Montrer qu'il existe un réel $\eta>0$ tel que :

$$]-\eta,\eta[\subset F$$

b) Application :

b1) On suppose que f est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+x^3}{3}$$

Déterminer les ensembles E et F.

b2) On suppose que f est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ f(x) = \frac{x}{2(1-x)}$$

$$f(1) = 0$$

Déterminer les ensembles E et F.

3°) On suppose que :

$$|f'(0)| > 1$$

a) Montrer que la série $\Sigma\, u_n$ converge si et seulement si il existe un entier naturel p tel que $u_p = 0$.

b) On suppose en plus que f est injective.

Déterminer l[redacted] ensemble[redacted] F.

c) Application : on suppose que f est définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ f(x) = \frac{2x}{1+x}$$

$$f(-1) = 0$$

Déterminer les ensembles E et F.

4°) Dans cette question, on suppose que :

$$f'(0) = -1$$

a) On suppose en plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f'(x) \in\ ]-1,0[$$

Déterminer les ensembles E et F.

b) Applications :

b1) On suppose que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = -\operatorname{th} x$$

Déterminer les ensembles E et F.

b2) On suppose que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = -\operatorname{sh} x$$

Déterminer les ensembles E et F.

Partie III : Dans cette partie, on suppose que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, f'(x) \in]0,1[$

On considère toujours la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\Sigma\, u_n$, et également la série entière $\Sigma\, z_n(x)$, dont le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z_n(x) = u_n\, x^n$$

On note R le rayon de convergence de cette série entière, Z sa fonction somme, et G l'ensemble de définition de Z, soit :

soit

$$\forall x \in G,\ Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, x^n$$

$R = \sup\{|x| \text{ tq } \sum |u_n x^n| \text{ converge}\}$

1°) a) Déterminer l'ensemble E.

b) Déterminer le rayon de convergence R suivant les valeurs du réel a.

2°) On suppose que a est strictement positif, et que f est de classe C^k ($k \geq 2$), et vérifie :

$$\forall l \in \{2,\ldots,k-1\},\ f^{(l)}(0) = 0, \text{ et } f^{(k)}(0) \neq 0$$

a) Montrer que $f^{(k)}(0) < 0$, et que l'entier k est impair.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(u_{n+1})^{\beta}} - \frac{1}{(u_n)^{\beta}}$$

a une limite finie non nulle pour une et une seule valeur β_0 de β, que l'on précisera en fonction de l'entier k.

c) En utilisant les résultats de la partie I, en déduire un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand l'entier n tend vers l'infini.

d) Déterminer l'ensemble G.

e) Montrer que la série entière $\Sigma\, z_n(x)$ converge uniformément sur le segment $[-R,0]$. 5/2

3°) Application : on suppose que a est strictement positif, et que f est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \text{th } x$$

a) Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand l'entier n tend vers l'infini.

b) Montrer que :

$$Z(x) \underset{x\to 1-}{\longrightarrow} +\infty$$

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{Z(x)}{\ln(1-x)}$

FIN DE L'ENONCE