Corrigé D.S. n°5 — PSI* 08-09

PROBLEME I

Questions de cours

1) FAUX : ex : $u_n = \frac{1}{n}$

2) VRAI : voir démo. dans le cours

3) FAUX : ex : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On a bien $u_n \sim v_n$, mais $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge (somme d'une série convergente et d'une série divergente)

Le résultat est cependant vrai lorsqu'on suppose, de plus, u_n et v_n de signes constants (cf. cours)

4) FAUX : ex : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. La réciproque est, elle, vraie (cf. cours)

5) $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \ln n$ est une suite alternée ; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; une étude rapide de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ montre que la suite $n \mapsto \frac{\ln n}{n}$ est décroissante à partir de $n=3$.

Le critère spécial sur les séries alternées permet alors d'en déduire : $\sum u_n$ converge.

Préliminaires

Il s'agissait ici de démontrer le célèbre théorème de Césaro.

1) a) Pour $k \geq N+1$, $|t_k| \leq \varepsilon$ d'où $\left|\sum\limits_{k=N+1}^{n} t_k\right| \leq \sum\limits_{k=N+1}^{n} |t_k| \leq (n-N)\varepsilon \leq n\varepsilon$

b) ε étant donné, N est fixé. On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{N} t_k = 0$, donc il existe $N' \geq N$ tq

$n \geq N' \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{N} t_k\right| \leq \varepsilon$. On a donc, pour $n \geq N'$:

$$|T_n| \leq \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} t_k\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| \leq \varepsilon + \frac{n}{n+1}\varepsilon \leq 2\varepsilon$$

ce qui, par définition, signifie : $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$

2) Posons $v_n = t_n - T$, de sorte que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. On a alors :

$$T_n - T = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} t_k - \frac{1}{n+1}(n+1)T = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(t_k - T) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n - T) = 0$ soit : $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$

3) a) $T_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{1}{n+1}\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \frac{1}{n+1}\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$ puisque $e^{i\theta} \neq 1$ (somme des 1ers termes d'une suite géom.)

d'où $T_n = \frac{1}{n+1}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{\left(e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)}{\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right)}\right) = \frac{1}{n+1}\cos\frac{n\theta}{2}\,\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}$

b) Donc : $|T_n| \leq \frac{1}{(n+1)\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$ d'où $\underline{\lim_{n\to\infty} T_n = 0}$

c) La suite (t_n) ne peut converger, car, par exemple, la suite extraite (t_{3n}) diverge ($t_{3n} = \cos n\pi = (-1)^n$)

d) Conclusion : le th. de Césaro donne : "(t_n) converge vers $T \Rightarrow (T_n)$ converge vers T", mais la réciproque est fausse.

Partie 1

1) La suite (na_n) converge, donc est bornée (th. du cours). Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |na_n| \leq K \quad \text{soit } |a_n| \leq \frac{K}{n}$$

2) Pour $x \in [0,1[$, $|a_n x^n| \leq \frac{K}{n} x^n \leq K.x^n$. La série $\sum x^n$ étant une série à termes réels positifs convergente, les th. de comparaison permettent de conclure : $\underline{\sum |a_n x^n| \text{ converge}}$.

3). La série $\sum a_n x^n$ étant abs. convergente est convergente, ce qui justifie l'écriture $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in [0,1[$.

. La relation donnée s'obtient par un calcul immédiat

4) a) Pour n fixé, la suite $(ka_k)_{k\geq n}$ est bornée, donc $\sup\{ka_k, k \geq n\} = M_n$ existe

b) $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ s'écrit : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $k \geq n_0 \Rightarrow |ka_k| \leq \varepsilon$

donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $M_{n_0} \leq \varepsilon$.

or, la suite (M_n) est décroissante, puisque $\{ka_k, k \geq n+1\} \subset \{ka_k, k \geq n\}$. On a donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $0 \leq M_n \leq M_{n_0} \leq \varepsilon$, i.e. $\underline{\lim_{n\to\infty} M_n = 0}$

5). D'après la relation du 3. :

$$|u_n| \leq |L - f(x)| + \left|\sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - 1)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| (1 - x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k$$

(eu en chemé ! $|x^k - 1| = 1 - x^k$..). De plus : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}.|ka_k| x^k \leq \frac{1}{n+1} M_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$

et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, d'où : $\underline{|u_n| \leq |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| (1 - x^k) + \frac{M_{n+1}}{(n+1)(1-x)}}$

• On a ensuite : $1 - x^k = (1-x)(1 + \underbrace{x}_{\leq 1} + \dots + \underbrace{x^{k-1}}_{\leq 1}) \leq k.(1-x)$ d'où le résultat

6) 7) Conclusion facile : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, donc $\sum a_k$ converge et $\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = L = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$

(interversion des limites)

PROBLÈME

PARTIE I

1) a) On calcule les produits partiels : $p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^{n} k}$

soit $p_n = \frac{1}{n}$, et $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Cela prouve que le produit infini $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ existe, et que $\prod_{k=2}^{+\infty} 1-\frac{1}{k} = 0$

b) Soit, de même, $p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k \cdot \prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^{n} k^2}$

d'où $p_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$. Donc $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$: $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

c) Soit $p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k \cdot \prod_{k=4}^{n+2} k}{\prod_{k=2}^{n} k \cdot \prod_{k=3}^{n+1} k}$

d'où $p_n = \frac{n+2}{3n}$. Donc $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}$: $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{3}$.

[Rem : tous ces produits étaient des produits "télescopiques".]

---

2) a) calculs ...

b) Puisque $x > 1$, et que la fonction $t \mapsto \operatorname{ch} t$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1,+\infty[$, on peut poser $x = \operatorname{ch} t$. On a alors :

$$v_2 = 2\operatorname{ch}^2 t - 1 = \operatorname{ch} 2t, \text{ puis, par récurrence facile : } v_n = \operatorname{ch}(2^{n-1}t)$$

Puis $\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{v_n}\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{th}(2^{n-1}t)}{\operatorname{th}(2^{n-2}t)} = \frac{\operatorname{th}(2^{N-1}t)}{\operatorname{th}(t/2)}$

Puisque $t > 1$, $2^{N-1}t \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$ d'où $\lim_{N\to\infty} \operatorname{th}(2^{N-1}t) = 1$, donc

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{v_n}\right) \text{ existe et vaut } \frac{1}{\operatorname{th}(t/2)} = \frac{1}{u}.$$

De $x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$, on déduit : $u^2 = \frac{x-1}{x+1}$, puis ($u>0$) $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Finalement : $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{v_n}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

PARTIE II

1) a) On peut considérer par exemple $u_n = \frac{1}{2}$ pour $\forall n$, d'où $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$.

b) Si $(P_n) \to P \neq 0$, alors $P_n \neq 0$ à partir d'un certain rang

d'où $u_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \to 1$.

c) Soit $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$. Puisque $0 < u_k < 1$, la suite (P_n) est décroissante,

minorée par 0, donc converge. Donc $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe

d) On a, toujours avec les mêmes notations :

$$\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$$

• Si la série $\sum \ln(u_k)$ converge et a pour somme l, alors la suite

$\ln(P_n)$ converge vers l, d'où (P_n) converge vers $e^l > 0$.

• Si la série $\sum \ln(u_k)$ diverge vers $-\infty$, alors $\ln(P_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc

$(P_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

• Si la série $\sum \ln(u_k)$ diverge vers $+\infty$, alors $\ln(P_n) \longrightarrow +\infty$ donc $(P_n) \to +\infty$

---

2) Notons $p_n = \prod_{k=0}^{n} (1+u_k)$. On a donc $\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)$

• Si $\sum u_k$ converge, alors $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ d'où $\ln(1+u_k) \underset{k\to\infty}{\sim} u_k$. On en

déduit alors (th. cours...) que $\sum \ln(1+u_k)$ converge. Donc $\lim_{n\to\infty} \ln(p_n)$ existe

et, par suite, $\lim_{n\to\infty} p_n$ existe i.e. $\prod_{k=0}^{+\infty} (1+u_k)$ existe.

• Réciproquement, si $\prod_{k=0}^{+\infty} (1+u_k)$ existe, $\lim_{n\to\infty} p_n$ existe, et cette limite est

≥ 1, donc $\lim_{n\to\infty} \ln(p_n)$ existe. Par suite, $\sum \ln(1+u_k)$ converge.

Donc $\lim_{k\to\infty} \ln(1+u_k) = 0$, soit $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ et $\ln(1+u_k) \underset{k\to\infty}{\sim} u_k$.

Il résulte alors du même thm du cours que $\sum u_k$ converge.

---

3) a) Soit $p_n = \prod_{k=0}^{n} (1+u_k)$. Alors $\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$

où $v_k = \ln(1+u_k) - u_k$. Or, $\sum u_k$ CV, donc $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$, d'où $v_k \sim -\dfrac{u_k^2}{2}$.

• Si $\sum u_k^2$ est divergente, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = -\infty$ (car $\sum v_k$ est divergente à termes négatifs). Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ existe et es finie, on en déduit : $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(p_n) = -\infty$, soit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$.

Donc, dans ce cas, $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k)$ existe et vaut 0.

• Si $\sum u_k^2$ est convergente, $\sum v_k$ aussi donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(p_n)$ existe.
Si $l = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(p_n)$, on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = e^l > 0$. Donc $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe et est non nu

---

b) • Soit $p_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$. Puisque $\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\left(1-\frac{1}{2k+2}\right) = 1$

on a : $p_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right) \times 1 \times \ldots \times 1 = \frac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n} = \frac{1}{2}$. D'autre part,

$p_{2n+1} = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right) p_{2n}$, d'où aussi $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Il en résulte que la suite (p_n) est convergente vers $\frac{1}{2}$

soit : $\prod\limits_{k=2}^{+\infty} \left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

• Soit $p_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$. Alors $\ln(p_n) = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$.

Or : $\ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right) = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$. Or, la série de terme généra $\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ converge, celle de terme général $-\frac{1}{2k}$ diverge, et celle de terme géné $O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$ est absolument convergente, donc convergente (car $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge...)

Par conséquent, $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$ est divergente, vers $-\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(p_n) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$. Ainsi : $\prod\limits_{k=2}^{+\infty} \left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$ existe. et vaut 0

PARTIE III.

1) Notons $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Alors : $s_{2n} = (u_1+u_2) + (u_3+u_4) + \cdots + (u_{2n-1}+u_{2n})$

soit $s_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$

Or : $\frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$ et $\sum \frac{1}{k}$ diverge. Donc $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = +\infty$

donc : $\sum u_n$ diverge.

• $u_{2n}^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $u_{2n-1}^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $u_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}$. Par suite : $\sum u_n^2$ diverge

b) On a : $(1+u_{2n-1})(1+u_{2n}) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = 1-\frac{1}{n^2}$

Notons $p_n = \prod_{k=3}^{n}(1+u_k)$. Alors : $p_{2n} = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$. D'après I.1, $\lim_{n\to\infty} p_{2n} = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $p_{2n+1} = p_{2n} \times (1+u_{2n+1}) = p_{2n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ donc $\lim_{n\to\infty} p_{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Il en résulte que (p_n) est convergente, et $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Soit : $\prod_{k=3}^{+\infty}(1+u_k)$ existe, et vaut $\frac{1}{2}$.

---

2) Posons $p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$. Alors $\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$, avec $v_k = \ln(1+u_k) - u_k$.

a) • Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\sum u_n^2$ l'est aussi d'après, directement, la partie II.

• Si $\sum u_n^2$ est convergente, alors $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ donc $v_k \sim -\frac{u_k^2}{2}$ donc $\sum v_k$ CV, donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k$ existe. Puisque $\lim_{n\to\infty} p_n$ existe et est non nulle, $\lim_{n\to\infty} \ln(p_n)$ existe. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ existe aussi, i.e. $\sum u_n$ converge.

b) Puisque $\lim_{n\to\infty} \ln(p_n)$ existe et est finie, on a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = -\infty$

D'autre part, $\lim_{n\to\infty} p_n$ existe et est $\neq 0$ par hypothèse, donc $\lim_{n\to\infty} \ln(p_n)$ existe, donc $\sum \ln(1+u_k)$ converge. Il en résulte que $\lim_{k\to\infty} \ln(1+u_k) = 0$, donc que $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ d'où $v_k \sim -\frac{u_k^2}{2}$.

Ainsi : $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = -\infty \Leftrightarrow \sum u_k^2$ diverge. CQFD

PARTIE IV

1) a) Pour $n > 1$, on a : $1 + u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ d'où $\frac{1}{p_n} + v_n = \frac{1}{p_{n-1}}$, soit : $v_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}$

b) • Si $\sum u_n$ converge, puisque $\sum u_n^2$ aussi (par hypothèse), d'après III.2, (p_n) converge vers p non nul, donc $\left(\frac{1}{p_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{p}$ et $\sum v_n$ converge (série télescopique)

• Par contre, avec par exemple $u_n = \frac{1}{n}$, on a vu que (p_n) tend vers $+\infty$ (cf. partie I), donc $\frac{1}{p_n} \to 0$ et $\sum v_n$ converge, alors que la série harmonique $\sum u_n$ diverge.

c) Prendre l'exemple $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (cf. II.3.b) (ici, $p_n \to 0$, donc $\frac{1}{p_n} \to +\infty$ et $\sum v_n$ DV,

---

2) a) Puisque $\alpha > 0$, on a : $u_n = \sin \frac{c}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{c}{n^\alpha}$.

• Pour $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente, ainsi que $\sum u_n^2$ donc (p_n) converge vers p non nul (cf. II.3.a)

• Pour $\alpha \leq 1$, la suite des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge vers $\pm\infty$ (selon le signe de c).

Puisque $\ln(1+u_n) \sim u_n$, on déduit de II.1.d que (p_n) converge vers 0 ssi $c < 0$.

Ainsi : $\prod(1+u_n) = 0 \iff \alpha \leq 1$ et $c < 0$

b) Supp. $\alpha = 1$

• si $c \geq 0$, (p_n) ne converge pas vers 0, donc $\sum p_n$ diverge grossièrement

• Supposons donc $c < 0$, $c = -b$ avec $b > 0$. On a alors :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \sin\frac{b}{k}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1 - \sin\frac{b}{k}\right) = -\frac{b}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\text{D'où } \ln p_n = -b\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{k^2}\right) = -b\left(\ln n + \gamma + o(1)\right) + \ell + o(1)$$

(car $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le t.g. d'une série convergente).

Ainsi, $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n\to\infty} (\ln p_n + b\ln n) = C$ soit $\lim_{n\to\infty} \ln(p_n . n^b) = C$

soit $p_n \sim \frac{e^C}{n^b}$. Par comparaison à une série de Riemann :

$\sum p_n$ converge ssi $b > 1$

Partie V

1) Posons $p_n = \prod_{k=1}^{n} \left|1 + \frac{i}{k}\right|$. Alors $p_n^2 = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et, puisque $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, il en est de même de la suite (p_n^2) (cf. II.2), donc de la suite (p_n).

---

2) Soit $p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$. L'hypothèse est ici : $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

On a donc $\lim_{n\to\infty} |p_n| = 0$ soit $\lim_{n\to\infty} \ln|p_n| = -\infty$ soit $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln|1+u_k| = -\infty$

Ainsi : $\sum \ln|1+u_n|$ est divergente

---

3) • Il est clair que u_n ne peut jamais prendre la valeur -1, sinon $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ serait nul !

• Avec les mêmes notations que dans la question précédente, on a : $\lim_{n\to\infty} p_n = \ell \in \mathbb{C}^*$

donc $\lim_{n\to\infty} |p_n| = |\ell|$ donc $\lim_{n\to\infty} \ln|p_n| = \ln|\ell|$ $(|\ell|>0)$

soit $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln|1+u_k| = \ln|\ell|$

Ainsi : $\sum \ln|1+u_n|$ est convergente.

• On a alors : $1+u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ (p_{n-1} est non nul !)

et $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} p_{n-1} = \ell$, d'où $\lim_{n\to\infty} 1+u_n = 1$ soit $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

---

4) On procède par récurrence sur n.

• Pour $n=1$, $|(1+z_1)-1| = |z_1| = (1+|z_1|)-1$

• Pour $n=2$ $|(1+z_1)(1+z_2)-1| = |z_1+z_2+z_1z_2| \leq |z_1|+|z_2|+|z_1||z_2|$
$= (1+|z_1|)(1+|z_2|)-1$.

• Supposons que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on ait :

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|) - 1$$

Alors, à l'ordre $n+1$:

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1}(1+z_k) - 1\right| = \left|\left(1+\left(\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right)\right)(1+z_{n+1}) - 1\right|$$

et, en utilisant l'inégalité obtenue pour $n=2$:

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1}(1+z_k)-1\right| \leq \left(1+\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right)\left(1+|z_{n+1}|\right)-1$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)(1+|z_{n+1}|)-1 \quad \text{d'après l'H.R.}$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n+1}(1+|z_k|)-1$$: ce qui est l'inégalité voulue à l'ordre $n+1$: cqfd

---

5) Notons $p_n=\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ et $q_n=\prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|)$

Puisque $\sum|u_n|$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} q_n$ existe (cf. II-2)

Pour $\forall n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}^*$ on a : $|p_{n+m}-p_n| = |p_n|\left|\prod_{k=n+1}^{n+m}(1+u_k)-1\right|$

$$\leq q_n.\left[\prod_{k=n+1}^{n+m}(1+|u_k|)-1\right]$$ d'après la question précédente

soit : $|p_{n+m}-p_n| \leq q_{n+m}-q_n$.

La suite (q_n) étant convergente, c'est une suite de Cauchy ; l'inégalité ci-dessus implique que (p_n) est également une suite de Cauchy, donc (p_n) converge.

---

6) Notons $s_n=\sum_{k=0}^{n}\theta_k$ et $p_n=\prod_{k=0}^{n}u_k=e^{is_n}$

- Si la suite (s_n) converge, il en est de même de la suite (p_n), par continuité de la fonction $t\mapsto e^{it}$
- Supposons (p_n) convergente, et soit $\ell=\lim_{n\to\infty}p_n$.

Puisque $|p_n|=1$ pour $\forall n$, $|\ell|=1$. Posons $\ell=e^{i\alpha}$, $\alpha\in[-\pi,\pi[$

On a alors, puisque $u_n=\frac{p_n}{p_{n-1}}$, $\lim_{n\to\infty}u_n=1$ d'où $\lim_{n\to\infty}\theta_n=1$.

D'autre part, $\frac{p_n}{\ell}\to 1$; posons $\frac{p_n}{\ell}=e^{it_n}$ avec $t_n\in]-\pi,\pi[$

On a alors : $e^{i(s_n-\alpha)}=e^{it_n}$ d'où $s_n=\alpha+t_n+2k_n\pi$ avec $k_n\in\mathbb{Z}$.

puis $\theta_{n+1}=s_{n+1}-s_n=t_{n+1}-t_n+2(k_{n+1}-k_n)\pi$

Or $\theta_n\to 0$, $t_n\to 0$ donc la suite $(k_{n+1}-k_n)$ tend vers zéro ; étant à valeurs entières, elle est donc stationnaire de valeur 0 à p.c.r. Ainsi :

$\exists n_0$ tq $\forall n\geq n_0$, $k_n=K$ et donc $s_n=\alpha+t_n+2K\pi$

Puisque $(t_n)\to 0$, on en déduit la convergence de la suite (s_n).
