CORRIGÉ DM N°5 (CCP Option DEUG 1993)

Première partie

1. Il s'agit ici de la linéarisation de $\sin^n a$; la méthode est classique : on utilise la relation (obligeamment rappelée par l'énoncé !) $2\mathrm{i}\sin a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$, puis on développe $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)^n$ par la formule du binôme :

$$(2\mathrm{i}\sin a)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-2k)a}$$

On distingue alors deux cas :

- Si n est pair, soit $n = 2p$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(-1)^p 4^p (\sin a)^{2p} &= \sum_{k=0}^{2p}(-1)^k\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(p-k)a}\\
&= (-1)^p\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(p-k)a} + \sum_{k=p+1}^{2p}(-1)^k\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(p-k)a}\\
&= (-1)^p\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(p-k)a} + \sum_{k'=0}^{p-1}(-1)^{2p-k'}\binom{2p}{2p-k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(k'-p)a} \quad (k' = 2p-k)\\
&= (-1)^p\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{2p}{k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(p-k)a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(k-p)a}\right] \quad \text{car } (-1)^{2p-k'} = (-1)^{k'} \text{ et } \binom{2p}{k'} = \binom{2p}{2p-k'}\\
&= (-1)^p\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)a)\\
&= (-1)^p\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{2p}{p-k}\cos 2ka \quad \text{en changeant } k \text{ en } p-k
\end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\boxed{4^p (\sin a)^{2p} = \binom{2p}{p} + 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{2p}{p-k}\cos 2ka.}$$

- De la même façon, si n est impair, soit $n = 2p+1$, on a :

$$\begin{aligned}
(-1)^p 4^p (2\mathrm{i})(\sin a)^{2p+1} &= \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2(p-k)+1)a}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2(p-k)+1)a} + \sum_{k=p+1}^{2p+1}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2(p-k)+1)a}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2(p-k)+1)a} + \sum_{k'=0}^{p}(-1)^{2p+1-k'}\binom{2p+1}{2p+1-k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2(k'-p)-1)a} \quad (k' = 2p+1-k)\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2(p-k)+1)a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2(p-k)+1)a}\right]\\
&= (2\mathrm{i})\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\sin((2(p-k)+1)a)\\
&= (2\mathrm{i})\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{2p+1}{p-k}\sin((2k+1)a) \quad \text{en changeant } k \text{ en } p-k
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{4^p (\sin a)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{p-k}\sin((2k+1)a).}$$

2. **a)** Pour $q=1$ on a $F_{p,1}=\dfrac{1-(-X^2)^p}{1-(-X^2)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-X^2)^k$ d'où immédiatement :

$$\boxed{H_p=\int_0^1 F_{p,1}(x)\,dx=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}.}$$

b) Cette question ne sert à rien pour la suite ! En voici cependant un corrigé rapide :

On a $F_{p,q}=\dfrac{1-(-X^2)^p}{(1-(-X^2))^q}=\dfrac{1-Y^p}{(1-Y)^q}$ en posant $Y=-X^2$, puis en posant $T=1-Y$: $F_{p,q}=\dfrac{1-(1-T)^p}{T^q}$.

Il ne reste plus alors qu'à développer $(1-T)^p$ à l'aide de la formule du binôme pour obtenir une expression de $F_{p,q}$ à l'aide de puissances positives et/ou négatives de T, et ensuite de remplacer T par $1+X^2$.

Deuxième partie

1. La fonction $f_n : x\mapsto \dfrac{\sin nx}{\sin x}$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, au voisinage de 0 on a $\sin nx \underset{x\to 0}{\sim} nx$ et $\sin x\underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=n$.

Ainsi f_n se prolonge en une fonction continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: elle y est donc intégrable.

a) On rappelle la formule bien connue : $\sin p-\sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$. On en déduit, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}I_{2p+1}-I_{2p-1}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2p+1)x-\sin(2p-1)x}{\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos(2px)}{\sin x}\,dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2px)\,dx=\frac{1}{p}\left[\sin(2px)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0\end{aligned}$$

La suite $(I_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est donc constante d'où :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p+1}=I_1=\frac{\pi}{2}.}$$

b) Pour $p\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}I_{2p}-I_{2p-2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2p)x-\sin(2p-2)x}{\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos((2p-1)x)}{\sin x}\,dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2p-1)x)\,dx=\frac{2}{2p-1}\left[\sin((2p-1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{2p-1}(-1)^{p-1}\end{aligned}$$

On additionne ensuite les égalités obtenues :

$$I_{2p}=\sum_{k=1}^{p}\left(I_{2k}-I_{2k-2}\right)+I_0=2\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

En faisant le changement d'indice $k\to k+1$, on obtient donc :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p}=2\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}=2H_p.}$$

c) $H_p=\displaystyle\int_0^1 F_{p,1}(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+(-1)^{p-1}\int_0^1\frac{x^{2p}}{1+x^2}\,dx.$

Or : $0\leqslant \displaystyle\int_0^1\frac{x^{2p}}{1+x^2}\,dx\leqslant\int_0^1 x^{2p}\,dx=\frac{1}{2p+1}$, donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1\frac{x^{2p}}{1+x^2}\,dx\right)=0$ d'où l'on tire :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \mathrm{H}_p = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tan} 1 = \frac{\pi}{4} \text{ puis } \lim_{p\to+\infty} \mathrm{I}_{2p} = \frac{\pi}{2}.}$$

2. • L'existence de J_n se montre de la même manière que celle de I_n.

• En utilisant également ici les formules bien connues : $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ et $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, on obtient, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n-2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx - \sin^2(n-2)x}{\sin^2 x} u\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\big(\sin nx - \sin(n-2)x\big)\big(\sin nx + \sin(n-2)x\big)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,\frac{\sin x\cos(n-1)x\sin(n-1)x\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\frac{\sin(2n-2)x\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x + \sin(2n-3)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_{2n-1} + \mathrm{I}_{2n-3}
\end{aligned}$$

d'où, compte tenu des résultats précédents :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2\,,\ \mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n-2} = \pi.}$$

• Les deux suites $(\mathrm{J}_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont donc des suites arithmétiques de raison π. Compte tenu de $\mathrm{J}_0 = 0$ et $\mathrm{J}_1 = \frac{\pi}{2}$, on déduit des formules du cours :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{J}_{2p} = p\pi \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_{2p+1} = \frac{\pi}{2} + p\pi$$

donc finalement on a toujours

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \mathrm{J}_n = n\frac{\pi}{2}.}$$

Troisième partie

1. • La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0. La convergence de l'intégrale K_1 est donc équivalente à celle de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, où a est un réel strictement positif.

• Une intégration par parties donne alors, pour $\mathrm{X} \geqslant a$:

$$\int_a^{\mathrm{X}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_a^{\mathrm{X}} - \int_a^{\mathrm{X}} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos \mathrm{X}}{\mathrm{X}} - \int_a^{\mathrm{X}} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

– La fonction cos étant bornée, on a $\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{\cos \mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 0$.

– D'autre part, pour tout $x \in [a,+\infty[$, $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$. Puisque la fonction positive $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ (fonction de Riemann de référence), il résulte des théorèmes de comparaison du cours qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc convergente. Cela signifie que la limite de $\displaystyle\int_a^{\mathrm{X}} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existe quand $\mathrm{X} \to +\infty$.

– Il en est donc de même de la limite de $\displaystyle\int_a^{\mathrm{X}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ quand $\mathrm{X} \to +\infty$, et, finalement :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{K}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

- Pour les mêmes raisons que ci-dessus, le problème de l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto \dfrac{|\sin x|}{x}$ ne se pose qu'au voisinage de $+\infty$.

  Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a, à l'aide du changement de variable $x = t + k\pi$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\left|(-1)^k \sin t\right|}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t$$
$$\geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

  Donc, en utilisant la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi}$. La série de terme général $\dfrac{1}{k}$ étant divergente (série harmonique) il en résulte $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$ et, par suite :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \text{ diverge.}}$$

2.
- La fonction h est évidemment continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$.

  De plus, pour $x \neq 0$: $h(x) = \dfrac{\sin x - x}{x \sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = -\dfrac{x}{6}$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h(x) = 0 = h(0)$, ce qui prouve que h est aussi continue en 0.
- h est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et, pour x dans cet intervalle :

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x + x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x}$$

  donc $h'(x)$ est du signe de $x^2 \cos x - \sin^2 x$, donc du signe de $x\sqrt{\cos x} - \sin x$, donc aussi du signe de $u(x) = x - \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ (en utilisant bien sûr le fait que $\sin x$ et $\cos x$ sont ici positifs, et en se limitant à $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

  La fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et un calcul passionnant que je ne reproduis pas ici donne

$$u'(x) = \frac{-t^4 + 2t^3 - 1}{2t^3} \quad \text{avec } t = \sqrt{\cos x}$$

  et l'étude de la fonction $t \mapsto -t^4 + 2t^3 - 1$ montre que celle-ci reste négative lorsque t décrit $[0, 1]$.

  Finalement, $u'(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc u est décroissante sur cet intervalle, et, puisque $u(0) = 0$, on en déduit $u(x) \leqslant 0$ puis $h'(x) \leqslant 0$.

  Ainsi h est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Étant continue et impaire, on en déduit

$$\boxed{h \text{ est décroissante sur } \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].}$$

3.
- Puisque $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in [a, b]$ et que g est à valeurs positives, on aura $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant \mathrm{M}g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, d'où en intégrant (puisque $a < b$) :

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{M}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- Considérons alors la fonction affine $\varphi : t \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - t\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. L'inégalité précédente se traduit par $\varphi(m) \geqslant 0$ et $\varphi(\mathrm{M}) \leqslant 0$, et il existe donc $\alpha \in [m, \mathrm{M}]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

  f étant continue sur le compact $[a, b]$, ses bornes inférieure et supérieure sont atteintes et le théorème de la valeur intermédiaire assure alors l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que $\alpha = f(c)$ puisque $\alpha \in [m, \mathrm{M}]$.

  L'égalité $\varphi(\alpha) = 0$ avec $\alpha = f(c)$ se traduit alors par :

$$\boxed{\text{Il existe } c \in [a, b] \text{ tel que } \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Rem : ce résultat porte le nom de formule de la moyenne.

- Enfin, si g est à valeurs négatives, le résultat reste vrai : il suffit de remplacer g par $-g$ dans ce qui précède.

4. Notons $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin(2n+1)x\,dx$ avec $n \geqslant 1$. On écrit d'abord :

$$A_n = A'_n + A''_n \quad \text{avec} \quad A'_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2n+1}} h(x)\sin(2n+1)x\,dx \text{ et } A''_n = \int_{\frac{n\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin(2n+1)x\,dx$$

- On a alors
$$\left|A''_n\right| \leqslant \int_{\frac{n\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}} |h(x)\sin(2n+1)x|\,dx \leqslant \|h\|_\infty \frac{\pi}{2(2n+1)}$$
où $\|h\|_\infty = \sup\limits_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |h(x)|$ (qui a un sens puisque h est continue). On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} A''_n = 0$.

- On a ensuite : $A'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{2n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} h(x)\sin(2n+1)x\,dx$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in \left[\frac{k\pi}{2n+1}, \frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right]$, $\sin(2n+1)x$ est du signe de $(-1)^k$, donc garde un signe constant. Le résultat de la question précédente (appliqué à $f = h$ et $g : x \mapsto \sin(2n+1)x$ sur l'intervalle $\left[\frac{k\pi}{2n+1}, \frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right]$) donne :
$$\exists c_k \in \left[\frac{k\pi}{2n+1}, \frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right] \text{ tel que } \int_{\frac{k\pi}{2n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} h(x)\sin(2n+1)x\,dx = h(c_k)\int_{\frac{k\pi}{2n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} \sin(2n+1)x\,dx$$
soit :
$$\int_{\frac{k\pi}{2n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} h(x)\sin(2n+1)x\,dx = h(c_k)\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right]_{\frac{k\pi}{2n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} = 2\frac{(-1)^k}{2n+1}$$
Finalement, $A'_n = \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h(c_k)$.

  Or :
  - Si n est impair :
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h(c_k) = h(c_0) - \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[h(c_{2p-1}) - h(c_{2p})\right] \leqslant h(c_0)$ puisque, h étant décroissante, on a $c_{2p-1} \leqslant c_{2p} \Rightarrow h(c_{2p-1}) \geqslant h(c_{2p})$; de même, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h(c_k) = \sum_{p=0}^{\frac{n-3}{2}}\underbrace{\left[h(c_{2p}) - h(c_{2p+1})\right]}_{\geqslant 0} + h(c_{n-1}) \geqslant h(c_{n-1})$.
  On aura donc
  $$h\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant h(c_{n-1}) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h(c_k) \leqslant h(c_0) \leqslant 0 \quad \text{d'où} \quad \left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h(c_k)\right| \leqslant \left|h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$$
  - Si n est pair :
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h(c_k) = \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1}\underbrace{\left[h(c_{2p}) - h(c_{2p+1})\right]}_{\geqslant 0} \geqslant 0$ et
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h(c_k) = h(c_0) - h(c_{n-1}) - \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}-1}\underbrace{\left[h(c_{2p-1}) - h(c_{2p})\right]}_{\geqslant 0} \leqslant h(c_0) - h(c_{n-1}) \leqslant -h(c_{n-1}) \leqslant -h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et on aura donc encore
  $$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h(c_k)\right| \leqslant \left|h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

  Cela permet d'en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A'_n = 0$, et finalement :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = 0.}$$

Rem : la méthode suggérée par l'énoncé est particulièrement barbare ! En effet, il était beaucoup plus facile de montrer que h est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ (grâce par exemple au théorème de prolongement de la dérivée) et de faire une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin(2n+1)x\,\mathrm{d}x$. Il s'agit de la méthode classique pour démontrer ce résultat, qui est un cas particulier du *lemme de Lebesgue*.

5. En reprenant toutes les notations et résultats précédents, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{A}_n + \mathrm{I}_{2n+1}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Or le changement de variable $t = (2n+1)x$ donne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{K}_1$, on en tire :

$$\boxed{\mathrm{K}_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

Quatrième partie

1. **a)** *Existence de* K_n

- Pour $n = 1$, on a déjà justifié l'existence de K_1.
- Supposons désormais $n \geqslant 2$. La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin^n x}{x^n}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

  Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$, donc f_n se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$. Le problème de son intégrabilité ne se pose donc qu'au voisinage de $+\infty$.

  Puisque $\dfrac{|\sin^n x|}{x^n} \leqslant \dfrac{1}{x^n}$ et que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$ (car $n \geqslant 2$, intégrale de Riemann de référence), les théorèmes du cours assurent alors l'absolue convergence, donc la convergence, de K_n.

b) *Signe de* K_n

- Puisque l'intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle est strictement positive, on a déjà $\mathrm{K}_n > 0$ lorsque n est pair.
- Supposons maintenant n impair. Puisque $\displaystyle\mathrm{K}_n = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{N}\pi} \frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x$ et que, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{\mathrm{N}\pi} \frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x$, on a

$$\mathrm{K}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^n(t+k\pi)}{(t+k\pi)^n}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} (-1)^{nk} \frac{\sin^n t}{(t+k\pi)^n}\,\mathrm{d}t$$

  (à l'aide du changement de variable $x = t + k\pi$).

  n étant impair, $(-1)^{nk} = (-1)^k$ et on a donc $\displaystyle\mathrm{K}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ avec $\displaystyle u_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin^n t}{(t+k\pi)^n}\,\mathrm{d}t$. La suite (u_k) est positive et décroissante (facile) ; de plus, $\displaystyle 0 \leqslant u_k \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{(k\pi)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{(k\pi)^n}$, donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Ainsi, la série alternée $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k u_n$ vérifie le critère spécial ; on en déduit qu'elle converge (ce que l'on savait déjà) et que sa somme est du signe de son premier terme $u_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t$, qui est strictement positif car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle.

Finalement on a donc bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \mathrm{K}_n > 0.}$$

2. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va prouver, par récurrence finie sur l'entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, la propriété

$$\mathscr{P}_k\ :\ \mathrm{K}_n = \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-k}}\frac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k}\,\mathrm{d}x \quad , \quad \text{cette intégrale étant convergente}$$

- Cette propriété est évidemment vérifiée pour $k=0$, par définition de K_n et la question précédente.
- Supposons là démontrée à un rang $k < n-1$. Une intégration par parties donne, pour $\mathrm{A} > \varepsilon > 0$:

$$(*)\quad \int_{\varepsilon}^{\mathrm{A}}\frac{1}{x^{n-k}}\frac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n-k-1}\frac{1}{x^{n-k-1}}\frac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k}\right]_{\varepsilon}^{\mathrm{A}} + \frac{1}{n-k-1}\int_{\varepsilon}^{\mathrm{A}}\frac{1}{x^{n-k-1}}\frac{\mathrm{d}^{k+1}\sin^n x}{\mathrm{d}x^{k+1}}\,\mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto \sin^n x$ étant périodique de période 2π, il en est de même de toutes ses dérivées successives. La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k}$ étant périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est donc bornée (exercice classique !), et puisque $n-k-1>0$, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-k-1}}\frac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k} = 0$.

D'autre part, on a le développement limité $\sin^n x \underset{x\to 0}{=} x^n + \mathrm{o}(x^n)$ et les théorèmes du cours sur les développements limités permettent d'écrire $\dfrac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} + \mathrm{o}(x^{n-k})$ d'où $\dfrac{1}{x^{n-k-1}}\dfrac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{n!}{(n-k)!}x + \mathrm{o}(x)$, puis $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-k-1}}\frac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k} = 0$.

Le terme entre crochet dans $(*)$ a donc une limite nulle quand $\varepsilon \to 0$ et $\mathrm{A} \to +\infty$, et puisqu'il en est de même de l'intégrale du membre gauche d'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-k}}\frac{\mathrm{d}^k \sin^n x}{\mathrm{d}x^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-k-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-k-1}}\frac{\mathrm{d}^{k+1}\sin^n x}{\mathrm{d}x^{k+1}}\,\mathrm{d}x$$

d'où l'on tire la propriété à l'ordre $k+1$.

• La propriété précédente à l'ordre $k = n-1$ s'écrit alors :

$$\boxed{\mathrm{K}_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\sin^n x}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\mathrm{d}x}$$

• Supposons n pair, soit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. On a vu en I.1 :

$$\sin^{2p} x = \frac{1}{4^p}\left[\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{2p}{p-k}\cos 2kx\right]$$

Or : $\dfrac{\mathrm{d}^{2p-1}\cos(2kx)}{\mathrm{d}x^{2p-1}} = (2k)^{2p-1}\cos\left(2kx + (2p-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p(2k)^{2p-1}\sin(2kx)$, d'où

$$\mathrm{K}_{2p} = \frac{2(-1)^p}{4^p(2p-1)!}\sum_{k=1}^{p}(-1)^k(2k)^{2p-1}\binom{2p}{p-k}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2kx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Le changement de variable $t = 2kx$ ($\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$) donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2kx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, et l'on obtient finalement la magnifique formule :

$$\boxed{\mathrm{K}_{2p} = \frac{(-1)^p \pi}{2(2p-1)!} \sum_{k=1}^{p} (-1)^k k^{2p-1} \binom{2p}{p-k}.}$$

- Dans le cas n impair, $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, on a vu en I.1 :

$$\sin^{2p+1} x = \frac{1}{4^p} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{p-k} \sin((2k+1)x)$$

Puisque $\dfrac{\mathrm{d}^{2p} \sin((2k+1)x)}{\mathrm{d}x^{2p}} = (2k+1)^{2p} \sin\left((2k+1)x + 2p\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p (2k+1)^{2p} \sin((2k+1)x)$, on obtient

$$\mathrm{K}_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{4^p (2p)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (2k+1)^{2p} \binom{2p+1}{p-k} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{x} \, \mathrm{d}x$$

et puisque l'on a encore $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, on trouve :

$$\boxed{\mathrm{K}_{2p+1} = \frac{(-1)^p \pi}{2(2p)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(k + \frac{1}{2}\right)^{2p} \binom{2p+1}{p-k}.}$$

- Compte tenu des expressions ci-dessus, le fait que $\boxed{\dfrac{\mathrm{K}_n}{\pi} \text{ est un nombre rationnel}}$ est immédiat.

3. Compte tenu de la stricte concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ 0 < \sin x < x$$

et puisque $1 < \dfrac{\pi}{2}$, on a aussi $|\sin x| < x$ pour $x > \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < 1$ d'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n = 0$.

D'autre part, pour $n \geqslant 2$ on aura, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\sin^n x}{x^n}\right| \leqslant \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Cette fonction φ est évidemment continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, la suite de fonctions continues $\left(x \mapsto \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^n\right)_{n \geqslant 2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle et vérifie l'hypothèse de domination ; on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour intervertir limite et intégrale, d'où l'on déduit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathrm{K}_n = 0.}$$

Cinquième partie

1.

- Puisque $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$ d'où $0 \leqslant \mathrm{A}_{n+1} \leqslant \mathrm{A}_n$.
- Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $0 \leqslant \sin x < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sin^n x = 0$. Ainsi, la suite de fonctions $(x \mapsto \sin^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers la fonction nulle.

  Ces fonctions sont continues et majorées en valeur absolue par la fonction constante égale à 1, qui est continue et intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Le théorème de convergence dominée permet alors d'intervertir limite et intégrale, d'où

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathrm{A}_n = 0.}$$

2. • Une intégration par parties donne, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin x}_{u'(x)} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{v(x)} \, dx \\
&= \underbrace{\Big[-\cos x \sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x \, dx = (n-1)(A_{n-2} - A_n)
\end{aligned}$$

d'où l'on tire la relation :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2\ ,\ A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}\,.}$$

• On a donc, pour $n \geqslant 2$: $nA_nA_{n-1} = (n-1)A_{n-1}A_{n-2}$, ce qui signifie que la suite $(nA_nA_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. On aura donc, puisque $A_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $A_1 = 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ nA_nA_{n-1} = A_1A_0 = \frac{\pi}{2}\,.}$$

3. La suite (A_n) étant décroissante, on a, pour $n \geqslant 2$: $A_n \leqslant A_{n-1} \leqslant A_{n-2}$. Puisque $A_n > 0$ (intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle), on en déduit

$$\forall n \geqslant 2\ ,\ 1 \leqslant \frac{A_{n-1}}{A_n} \leqslant \frac{A_{n-2}}{A_n} = \frac{n}{n-1}$$

d'où, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n} = 1\,.}$$

4. En utilisant le résultat des deux questions précédentes on a

$$\lim_{n\to+\infty} nA_n^2 = \lim_{n\to+\infty} (nA_nA_{n-1})\frac{A_n}{A_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{\pi}{2}$$

A_n étant positif, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}A_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ ou encore

$$\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,.}$$

5. On connaît le développement en série entière :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Il est facile de vérifier que, pour $x \in [0,1]$, la suite $\left(\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 quand $n \to +\infty$. La série ci-dessus vérifie donc le critère spécial sur les séries alternées.
On peut en déduire que sa somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives, et en particulier les deux premières, ce qui donne

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$$

et l'inégalité précédente implique évidemment celle de l'énoncé.

Rem : il était bien sûr possible d'étudier la fonction $x \mapsto \sin x - x(1-x^2)$ pour démontrer l'inégalité (très grossière) proposée.

6. • $K_{2p} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p} x}{x^{2p}}\,\mathrm{d}x$ donc évidemment $K_{2p} \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^{2p} x}{x^{2p}}\,\mathrm{d}x$.

• En utilisant l'inégalité obtenue à la question précédente, on en déduit $K_{2p} \geqslant \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{2p}\,\mathrm{d}x$.

En faisant le changement de variable $x = \cos t$ (avec $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$) dans cette dernière intégrale on obtient alors directement

$$\boxed{K_{2p} \geqslant A_{4p+1}.}$$

• Les K_n étant positifs, on aura, pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} K_n \geqslant \sum_{p=1}^{N} K_{2p}$.

Or $K_{2p} \geqslant A_{4p+1}$ avec $A_{4p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{8}}\dfrac{1}{\sqrt{p}}$. La série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ étant divergente (série de Riemann), il en est donc de même de la série de terme général K_{2p}. On aura donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{p=1}^{N} K_{2p} = +\infty$ (puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs), d'où $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{2N} K_n = +\infty$ et par suite :

$$\boxed{\text{La série de terme général } K_n \text{ diverge.}}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆