CORRIGÉ DU DS°7

Problème 1 E3A PSI 2002

Préliminaire.

La série de Riemann définissant $\zeta(x)$ converge si et seulement si $x > 1$, donc

$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \zeta \text{ est }]1,+\infty[.}$

Partie 1.

Question 1.

1.1. Par concavité de la fonction ln, on a $\forall t > 0$, $\ln t \leqslant t-1$, d'où, avec $t = 1+\dfrac{x}{n}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x > 0\ ,\ u_n(x) \geqslant 0\ .}$$

1.2. Du développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0, on déduit, pour $x > 0$ fixé :

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} \frac{x}{n} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{d'où} \quad u_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}\ ;$$

il en résulte, par comparaison à une série de Riemann, que la série numérique $\sum u_n(x)$ converge, cela pour tout $x > 0$, autrement dit :

$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } u_n \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$

Question 2.

2.1. Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, avec

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ u_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \quad \text{d'où} \quad \left|u_n'(x)\right| = \frac{x}{n(x+n)} \leqslant \frac{b}{n^2} \quad \text{puis} \quad \left\|u_n\right\|_\infty \leqslant \frac{b}{n^2}.$$

Or, la série numérique $\sum \dfrac{b}{n^2}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$; on a déjà vu que $\sum u_n$ converge simplement sur $[a,b]$, donc on peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions :

$$\boxed{\text{S est dérivable sur } [a,b] \text{ (et } \mathrm{S}' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n').}$$

2.2. Le résultat précédent est établi pour tout couple (a,b) tel que $0 < a < b$; par conséquent :

$$\boxed{\text{S est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x > 0\ ,\ \frac{d\mathrm{S}}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).}$$

Question 3.

Par définition des u_n, on a :

$$\sum_{n=1}^{p} u_n(1) = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p}\Big(\ln(n+1) - \ln n\Big) = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln(p+1)$$

d'où, puisque $\gamma = \mathrm{S}(1)$,

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p - \gamma = \sum_{n=1}^{p} u_n(1) + \ln(p+1) - \ln p - \mathrm{S}(1) = \sum_{n=1}^{p} u_n(1) - \mathrm{S}(1) + \ln\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, puisque $\mathrm{S}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$. Autrement dit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} \underset{p\to\infty}{=} \ln p + \gamma + o(1).}$$

Question 4.

4.1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on a :

$$\forall n \in [\![1,p]\!]\ ,\ u_n(x+1) - u_n(x) = \frac{x+1}{n} - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) - \frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n} - \ln(n+x+1) + \ln(n+x)$$

En sommant, il reste après télescopage :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{p} \left(u_n(x+1) - u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).}$$

4.2. Soit $x > 0$ fixé ; on a pour $p \in \mathbb{N}^*$, d'après les résultats précédents :

$$\sum_{n=1}^{p} u_n(x+1) - \sum_{n=1}^{p} u_n(x) \underset{p\to\infty}{=} \ln p + \gamma + o(1) + \ln(1+x) - \ln(p+1+x)$$
$$\underset{p\to\infty}{=} \gamma + \ln(1+x) - \ln\left(1 + \frac{1+x}{p}\right) + o(1),$$

d'où, en faisant tendre p vers l'infini : $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \gamma + \ln(1+x)$, soit :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \mathrm{S}(x+1) = \mathrm{S}(x) + \gamma + \ln(1+x).}$$

Question 5.

5.1. Soit $x > 0$; d'après le résultat précédent,

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{x+1} \exp\left(-\gamma(x+1) + \mathrm{S}(x+1)\right)$$
$$= \frac{1}{x+1} \exp\left(-\gamma(x+1) + \mathrm{S}(x) + \gamma + \ln(x+1)\right)$$
$$= \frac{1}{x+1} \exp\left(-\gamma x + \mathrm{S}(x)\right) \exp\left(\ln(x+1)\right)$$
$$= \exp\left(-\gamma x + \mathrm{S}(x)\right),$$

soit :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \varphi(x+1) = x\,\varphi(x).}$$

5.2. Nous avons vu que S était dérivable sur $]0, +\infty[$, donc, exp étant dérivable sur $\mathbb{R}$, en vertu des théorèmes classiques :

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

On calcule :

$$\forall x > 0\ ,\ \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \exp\left(-\gamma x + \mathrm{S}(x)\right) + \frac{1}{x}\left(-\gamma + \mathrm{S}'(x)\right) \exp\left(-\gamma x + \mathrm{S}(x)\right),$$

soit

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x} - \gamma + \mathrm{S}'(x)\right) \cdot \varphi(x).}$$

Comme $\mathrm{S}(1) = \gamma$, $\varphi(1) = 1$; de plus, d'après **2.2.**,

$$\mathrm{S}'(1) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{p\to\infty} \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = 1,$$

d'où finalement :

$$\boxed{\varphi'(1) = -\gamma.}$$

Question 6.

Soient $n \geqslant 1$ et $x > 0$. Par définition de φ_n on a :

$$\begin{aligned}
\ln \varphi_n(x) &= x \ln n + \sum_{k=1}^{n} \ln k - \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln(x+k) \\
&= x \ln n - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \ln x \\
&= x \ln n + \sum_{k=1}^{n} u_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} - \ln x \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_n(x) - x\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) - \ln x
\end{aligned}$$

D'où, par définition de S et grâce au **3.**,

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \ln\big(\varphi_n(x)\big) \text{ tend vers } \mathrm{S}(x) - x\gamma - \ln x \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

Question 7.

7.1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$; π_p est dans $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\ln \pi_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{x}{n} - \sum_{n=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{p} u_n(x) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \mathrm{S}(x).$$

D'où, par continuité de la fonction exp :

$$\boxed{\text{La suite } (\pi_p)_{p \geq 1} \text{ converge vers } \mathrm{L}(x) = \exp\big(\mathrm{S}(x)\big).}$$

7.2. Alors, par définition même de φ :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \varphi(x) = \frac{\mathrm{L}(x)}{x} \exp(-x\gamma).}$$

Partie 2.

Question 1.

1.1. Pour x réel, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs strictement positives et

$$f_x(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{et} \quad t^2 f_x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad f_x(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par conséquent, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1 - x < 1$ (c'est-à-dire $x > 0$) et f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x. Par conséquent :

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \Gamma \text{ est }]0, +\infty[.}$$

1.2. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x \to +\infty} (1 - \mathrm{e}^{-x}) = 1$.

1.3. Soient $x > 0$ et a, b tels que $0 < a < b$; on intègre par parties sur le segment $[a, b]$:

$$x \int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $x > 0$, quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$: $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, soit :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).}$$

Question 2.

2.1. Par convexité de la fonction exp, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp x \geqslant 1 + x$; d' où, avec $x = -t$:

$$\boxed{\forall t \geq 0\ ,\ \exp(-t) \geqslant 1 - t.}$$

Soient alors $t \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$; si $t \geqslant n$, $g_n(t) = 0$ et on a bien $0 \leqslant g_n(t) \leqslant \exp(-t)$; si $0 \leqslant t < n$, on applique le résultat ci-dessus à t/n :

$$0 \leqslant 1 - \frac{t}{n} \leqslant \exp\left(-\frac{t}{n}\right) \quad \text{d'où} \quad 0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \exp(-t).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \geqslant 0\ ,\ \forall n \geqslant 1\ ,\ 0 \leqslant g_n(t) \leqslant \exp(-t).}$$

2.2. Soit $x > 0$ fixé ; $f_n : t \mapsto t^{x-1} g_n(t)$ est nulle sur $[n, +\infty[$, continue sur $]0, n]$, avec $f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$, donc, par comparaison à une intégrale de Riemann ($1 - x < 1$), f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, avec :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

On applique alors le théorème de convergence dominée à la suite de fonction (f_n), sur l'intervalle $]0, +\infty[$: les f_n sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$, la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $f : t \mapsto t^{x-1}\exp(-t)$; en effet, pour $t > 0$ fixé, j'ai $t < n$ pour n assez grand (précisément pour $n > t$!) et

$$\forall n > t\ ,\ f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-t)t^{x-1}$$

car

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -t$$

f est continue sur $]0, +\infty[$, il ne reste qu'à vérifier l'hypothèse de domination. Or, d'après la question précédente, on a

$$\forall t > 0\ ,\ \forall n \geq 1\ ,\ \left|f_n(t)\right| \leq f(t),$$

qui ne dépend pas de n et enfin, d'après le **1.1.**, f est intégrable sur $]0, +\infty[$; le théorème de convergence dominée me permet alors de conclure que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\infty} f(t)dt,$$

autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).}$$

Question 3.

3.1. Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto (1-t)^n t^{x-1}$ est continue sur $]0, 1]$, à valeurs positives, équivalente à $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ au voisinage de 0, donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$:

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \mathrm{I}_n \text{ est }]0, +\infty[.}$$

3.2. Soient $x > 0$. On effectue le changement de variable $u = t/n$ qui est une $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[0, n]$ sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^{x-1}}{n^{x-1}} \cdot \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^x}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Donc :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \forall n \geqslant 1\ ,\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x \mathrm{I}_n(x).}$$

3.3. Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, on intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$, où ε est un réel de $]0, 1]$:

$$\int_\varepsilon^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \left[(1-t)^n \frac{t^x}{x}\right]_{t=\varepsilon}^{t=1} + \frac{n}{x}\int_\varepsilon^1 (1-t)^{n-1} t^x dt$$

Pour ε tendant vers 0, comme $x > 0$, on obtient

$$\boxed{\mathrm{I}_n(x) = \frac{n}{x}\mathrm{I}_{n-1}(x+1).}$$

Par une récurrence immédiate, il vient, compte tenu du fait que la relation ci-dessus reste correcte pour $n = 1$ (en étendant la définition de I_n à I_0) :

$$\mathrm{I}_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\mathrm{I}_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et donc, d'après **3.2.** :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \varphi_n(x).$$

Dans la partie **1.**, on a déterminé la limite de $\left(\ln\varphi_n(x)\right)$, qui donne, par continuité de la fonction exp, $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$; finalement, grâce au **2.2.**, par unicité de la limite :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \Gamma(x) = \varphi(x).}$$

Partie 3.

Question 1.

La fonction $h : t \mapsto \exp(-t)\ln^2 t$ est continue sur $]0,+\infty[$, à valeurs positives et, d'après les croissances comparées des fonctions usuelles, on a

$$h(t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad h(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, h est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp(-t)\ln^2 t \, \mathrm{d}t \ \text{existe.}}$$

Question 2.

2.1. Soit $u > 1$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[u, \frac{1}{u}\right]$, $|\ln t| \leqslant \ln u$ et $\mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$, d'où

$$\sup_{\left[u,\frac{1}{u}\right]} |v_n| \leqslant \frac{x^n(\ln u)^n}{n!} \ ;$$

or la série numérique (x et u étant fixés) $\sum \frac{(x\ln u)^n}{n!}$ converge (série exponentielle, de somme $\exp(x\ln u)$). Par conséquent :

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } v_n \text{ converge normalement sur } \left[\frac{1}{u}, u\right].}$$

2.2. *A fortiori*, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $\left[u, \frac{1}{u}\right]$, d'où, grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\boxed{\forall u > 1\ , \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}_n(u) = \int_0^u \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\right) dt\,.}$$

Question 3.

3.1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'existence de a_n et b_n se justifie comme celle de l'intégrale du **1.**, et

$$a_n + b_n = \frac{x^n}{n!}\int_0^{+\infty} \exp(-t)|\ln t|^n \,\mathrm{d}t$$

d'où, par linéarité de l'intégrale, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{p}(a_n + b_n) \leqslant \int_0^{+\infty} \exp(-t)\sum_{n=0}^{p}\frac{(x|\ln t|)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t > 0$, x étant fixé, la série numérique de terme général $\frac{(x|\ln t|)^n}{n!}$ est convergente, de somme $\exp(x|\ln t|)$; comme elle est à termes positifs, ses sommes partielles sont majorées par sa somme, d'où

$$\forall t > 0 \quad \exp(-t)\sum_{n=0}^{p}\frac{(x|\ln t|)^n}{n!} \leqslant \exp(-t)\exp(x|\ln t|) = \exp(-t + x|\ln t|).$$

Pour $t \in]0,1]$, $\exp(-t + x|\ln t|) = \exp(-t - x\ln t) = \frac{\exp(-t)}{t^x} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et,

pour $t \geqslant 1$, $\exp(-t + x|\ln t|) = \exp(-t + x\ln t) = t^x\exp(-t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que la fonction $t \mapsto \exp(-t + x|\ln t|)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'où finalement, par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\forall p \geqslant 0\ , \ \sum_{n=0}^{p}(a_n + b_n) \leqslant \int_0^{+\infty} \exp(-t + x|\ln t|)\,\mathrm{d}t}$$

3.2. Pour tout $u > 1$, $\left|\mathrm{T}_n(u)\right| \leqslant a_n + b_n$, d'où $\sup_{]1,+\infty[} \left|\mathrm{T}_n\right| \leqslant a_n + b_n$. Or on vient de voir que la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général $a_n + b_n$ est majorée. Comme cette série est à termes positifs, il en résulte qu'elle converge et, par conséquent :

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } \mathrm{T}_n \text{ converge normalement sur }]1,+\infty[.}$$

Question 4.

4.1. Par définition, $\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t)\,\mathrm{d}t$, où, pour tout $t > 0$: $t^x = \exp(x \ln t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln t)^n}{n!}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \exp(-t)(\ln t)^n \right) \mathrm{d}t\,.}$$

4.2. Autrement dit, d'après **2.2.**, $\Gamma(1+x) = \lim_{u\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{T}_n(u)$. Or, on vient de voir que la série de fonctions $\sum \mathrm{T}_n$ converge uniformément sur $]1,+\infty[$; comme par ailleurs, pour tout n, $\mathrm{T}_n(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$ (car v_n est intégrable sur $]0,+\infty[$), le théorème de la double limite s'applique : la série numérique de terme général $\int_0^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\lim_{u\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{T}_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{u\to+\infty} \mathrm{T}_n(u).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t)(\ln t)^n\,\mathrm{d}t \right).}$$

Question 5.

5.1. D'après les questions **2.2.** et **5.2.** de la partie **1**, on a :

$$\varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right) \cdot \varphi(x),$$

soit, puisque $\varphi = \Gamma$ d'après la dernière question de la partie **2** :

$$\boxed{\frac{\frac{d\Gamma}{\mathrm{d}x}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).}$$

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, puisque $x \in]0,1[$, on a $\left| -\frac{x}{n} \right| < 1$ et la formule pour la somme de la série géométrique de raison $-\frac{x}{n}$ donne :

$$\frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{n} \right)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{n} \right)^k$$

d'où

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{n^{k+1}},$$

soit, d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\frac{\frac{d\Gamma}{\mathrm{d}x}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right).}$$

5.2. L'énoncé autorise à admettre que

$$\forall x \in]0,1[\ ,\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}x^k\right) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\right),$$

(*Rem : cela découle d'un théorème qui au programme MP mais pas PSI...*)
soit, en réindexant et en changeant le nom de la variable :

$$\forall t \in]0,1[\ ,\ \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = -\frac{1}{t} - \gamma + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k t^{k-1}\zeta(k).$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$; en intégrant sur le segment $[\varepsilon, x]$, on obtient, sachant que Γ est à valeurs strictement positives :

$$[\ln\Gamma(t)]_{t=\varepsilon}^{t=x} = -\ln x + \ln\varepsilon - \gamma x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k).$$

L'intégration terme à terme de la série est justifiée, du fait qu'il s'agit de la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1 — car $\left|(-1)^k\frac{\zeta(k)}{k}\right| \le \frac{\zeta(2)}{2}$ pour tout $k \ge 2$ — et que l'on intègre sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière, où elle converge normalement donc uniformément. On a donc :

$$\ln\Big(x\Gamma(x)\Big) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k) + \ln\Big(\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\Big),$$

cela pour tout ε de $]0,1[$; or $\varepsilon\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1+\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1$, puisque $\Gamma = \varphi$ est continue en 1 (on a vu dans la partie **1** qu'elle était dérivable sur $]0,+\infty[$). A la limite, lorsque ε tend vers 0, j'obtiens donc

$$\ln\Gamma(1+x) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k),$$

soit, en appliquant la fonction exp :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k)\right).}$$

5.3. Un résultat du cours sur les séries entières permet d'écrire

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k) \underset{x\to 0}{=} \frac{\zeta(2)}{2}x^2 + o(x^2)$$

d'où

$$\Gamma(1+x) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(-\gamma x + \frac{\zeta(2)}{2}x^2 + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \gamma x + \frac{\gamma^2+\zeta(2)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Par ailleurs, on a vu au **4.2.** que

$$\forall x \in]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n x^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ \lambda_n = \int_0^{+\infty}\exp(-t)\frac{(\ln t)^n}{n!}dt.$$

Ainsi, la série entière $\sum\lambda_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, sa fonction somme admet en 0 le développement limité $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + o(x^2)$. D'où, par unicité de ce développement limité :

$$\lambda_0 = 1\ ,\ \lambda_1 = -\gamma\ ,\ \lambda_2 = \frac{\gamma^2+\zeta(2)}{2}.$$

En particulier, sachant que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\exp(-t)\ln^2 t\ \mathrm{d}t = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.}$$

…

Problème 2 : CENTRALE MP 2009)

Partie I : Questions préliminaires

I.1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

I.2) Pour $x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1}\ dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle, donc $\Gamma''(x) > 0$. Donc Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit que Γ' est strictement positive sur $]c,+\infty[$ et Γ strictement croissante sur cet intervalle ; *a fortiori* sur $[2,+\infty[$.

I.3) Comme $(\Gamma(n))_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ et que Γ est croissante au voisinage de $+\infty$, Γ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On peut donc limiter l'étude à $\gamma > 1$.

Pour $x \geqslant 2$, on notera n_x sa partie entière.

On a alors : $0 \leqslant \dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \leqslant \dfrac{\gamma^{n_x+1}}{\Gamma(n_x)} = \gamma^2 \dfrac{\gamma^{n_x-1}}{(n_x-1)!}$. Comme n_x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que la suite $\left(\dfrac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, $\dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, *i.e* $\gamma^x = o(\Gamma(x))$ au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A -

II.A.1) On suppose que ϕ n'est pas positive sur $[t_0,+\infty[$. Il existe alors $t_1 \geqslant t_0$ tel que $\phi(t_1) < 0$; par décroissance de ϕ, sur $[t_1,+\infty[$, $\phi(t) \leqslant \phi(t_1) < 0$. Or la fonction constante $\phi(t_1)$ n'est pas intégrable sur l'intervalle non borné $[t_1,+\infty[$; donc ϕ n'est pas intégrable sur cet intervalle : contradiction.
Donc ϕ est positive sur $[t_0,+\infty[$.

Autre solution possible : ϕ étant décroissante sur $[t_0,+\infty[$, elle admet une limite en $+\infty$; comme ϕ est intégrable, cette limite est nulle ; par décroissance, ϕ est positive sur $[t_0,+\infty[$.

II.A.2 -

II.A.2.a) Pour $n \geqslant \dfrac{t_0}{h} + 1$, l'intervalle $[(n-1)h, nh]$ est inclus dans $[t_0,+\infty[$ donc ϕ est décroissante sur cet intervalle et, $\forall t \in [(n-1)h, nh], \phi(t) \geqslant \phi(nh)$.

Donc $\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt \geqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(nh)\ dt = h\phi(nh) \geqslant 0$.

II.A.2.b) Comme ϕ est intégrable sur $[0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt$ converge (et a pour somme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt$) ; on déduit de II.A.2.a et du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs à partir d'un certain rang, la convergence de la série $\sum h\phi(nh)$.

II.A.3) Soit $\varepsilon > 0$ donné. La fonction ϕ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et de limite nulle en $+\infty$, il existe un réel A tel que $A > t_0 + 1$ et $\displaystyle\int_{A-1}^{+\infty} \phi(t)\,dt < \varepsilon$ et $\phi(A-1) < \varepsilon$.

Soit $h \in]0,1[$ et n_0 la partie entière de $\dfrac{A}{h}$.

- Pour $n \geqslant n_0 + 1$, on a $n \geqslant \dfrac{t_0}{h} + 1$ donc, d'après II.A.2.a, il vient $0 \leqslant h\phi(nh) \leqslant \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt$, puis en sommant
$$0 \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} h\phi(nh) \leqslant \int_{n_0 h}^{+\infty} \phi(t)\,dt < \varepsilon$$
puisque $n_0 h \geqslant A - 1$.

- D'autre part, les points $0, h, \ldots, n_0 h, \mathrm{A}$ forment une subdivision de l'intervalle $[0, \mathrm{A}]$ de pas h, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} h\phi(nh) + (\mathrm{A} - n_0 h)\phi(n_0 h)$ est une somme de Riemann associée à ϕ qui est continue sur $[0, \mathrm{A}]$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $h < \alpha$, on ait
$$\left|\int_0^{\mathrm{A}} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0-1} h\phi(nh) - (\mathrm{A} - n_0 h)\phi(n_0 h)\right| < \varepsilon$$
d'où
$$\left|\int_0^{\mathrm{A}} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh)\right| < 3\varepsilon$$
puisque $h < 1$ et $\phi(n_0 h) \leqslant \phi(\mathrm{A} - 1) < \varepsilon$.
Finalement
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| &\leqslant \left|\int_0^{\mathrm{A}} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh)\right| + \left|\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \\ &< 3\varepsilon + \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} h\phi(nh) < 5\varepsilon\end{aligned}$$
pour $0 < h < \alpha$, ce qui prouve bien $\displaystyle\lim_{h\to 0, h>0} h\sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t$.

II.B -

II.B.1) Puisque $\alpha \geqslant 1$, g_α est continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'intégrale $\Gamma(\alpha)$). Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-2}(-t + \alpha - 1)$. Donc g'_α est négative sur $[\alpha - 1, +\infty[$ et g_α est décroissante sur cet intervalle. Les hypothèses du (II.A) sont donc satisfaites par g_α, $\alpha \geqslant 1$.

Pour $x \in]0, 1[$, $h = -\ln x > 0$ et $\displaystyle h\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = (-\ln x)\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln x)$; comme h tend vers 0^+ quand x tend vers 1^-, d'après II.A, $\displaystyle(-\ln x)\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} \int_0^{+\infty} g_\alpha = \Gamma(\alpha)$.

II.B.2) -

II.B.2.a) On étudie la convergence absolue de la série $\sum n^{\alpha-1}x^n$ pour $x \neq 0$:
$\displaystyle\frac{\left|(n+1)^{\alpha-1}x^{n+1}\right|}{\left|n^{\alpha-1}x^n\right|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$; d'après la règle de d'Alembert, comme $\left|n^{\alpha-1}x^n\right| > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, si $|x| < 1$, la série $\sum \left|n^{\alpha-1}x^n\right|$ converge, si $|x| > 1$, elle diverge.

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{\alpha-1}x^n$ vaut 1.

II.B.2.b) Pour $x \in]0, 1[$, $g_\alpha(-n\ln x) = (-\ln x)^{\alpha-1} n^{\alpha-1} x^n = (-\ln x)^{\alpha-1} \mathrm{S}_\alpha(x)$.
Puisque $\alpha \geqslant 1$:
$-\ln x\, g_\alpha(-n\ln x) = (-\ln x)^\alpha \mathrm{S}_\alpha(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} \Gamma(\alpha) \neq 0$; donc $\mathrm{S}_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(-\ln x)^\alpha}$ au voisinage de 1^-.
Comme $\ln x \sim x - 1$ au voisinage de 1 : $\mathrm{S}_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$ au voisinage de 1^-.

Partie III : La première fonction eulérienne

III.A -

III.A.1) La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0, 1[$.
Équivalente en 0^+ à $t^{\alpha-1}$, elle est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $\alpha - 1 > -1$, *i.e* $\alpha > 0$.
Équivalente en 1^- à $(1-t)^{\beta-1}$, elle est intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $\beta - 1 > -1$, *i.e* $\beta > 0$.

Elle est donc intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si α et β sont strictement positifs.

III.A.2) -

III.A.2.i) L'égalité s'obtient facilement avec le changement de variable affine $t \mapsto u = 1-t$, qui est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ sur lui-même.

III.A.2.ii) $u = \dfrac{t}{1-t} \iff t = \dfrac{u}{u+1}$; $u \mapsto t = \dfrac{u}{1+u}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$;
$\dfrac{dt}{du} = \dfrac{1}{(1+u)^2}$; $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} = \left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha+\beta-2} = u^{\alpha-1}\dfrac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}$.
Donc $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}\frac{1}{(1+u)^2}\ du = \int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}\ du$.

III.A.2.iii) Soit $0 < a < b < 1$; en intégrant par parties :
$\displaystyle\int_a^b t^\alpha(1-t)^{\beta-1}\ dt = \left[t^\alpha\frac{-(1-t)^\beta}{\beta}\right]_a^b + \frac{\alpha}{\beta}\int_a^b t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\ dt$.
Comme α et β sont strictement positifs, $t^\alpha\dfrac{-(1-t)^\beta}{\beta}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ou 1 ;
donc $\left[t^\alpha\dfrac{-(1-t)^\beta}{\beta}\right]_a^b \xrightarrow[a\to 0,\to 1]{} 0$.
De plus, $t^{\alpha-1}(1-t)^\beta = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} - t^\alpha(1-t)^{\beta-1}$;
donc $\displaystyle\int_a^b t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\ dt \xrightarrow[a\to 0, b\to 1]{} B(\alpha,\beta) - B(\alpha+1,\beta)$.
On en déduit : $B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\beta}(B(\alpha,\beta)-B(\alpha+1,\beta))$; puis : $B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

III.B -

III.B.1) On suppose que $\forall \alpha,\beta > 2,\ B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.
Soit $\alpha,\beta > 0$;

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\alpha+2,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\beta,\alpha+2)\\ &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}B(\beta+1,\alpha+2) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}\frac{\alpha+\beta+3}{\beta+1}B(\beta+2,\alpha+2). \end{aligned}$$

Comme $\alpha+2$ et $\beta+2$ sont strictement supérieurs à 2 :
$B(\beta+2,\alpha+2) = \dfrac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)} = \dfrac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$.
Après substitution et simplification : $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

III.B.2) -

III.B.2.a) Comme $\alpha-1$ et $\beta-1$ sont strictement plus grands que 1, $\psi_{\alpha,\beta}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, donc sa dérivée est bornée. Donc $\psi_{\alpha,\beta}$ est lipschitzienne (d'après l'inégalité des accroissements finis).

III.B.2.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $B(\alpha,\beta) - u_n(\alpha,\beta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t) - \psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt$.
Comme, sur $\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$, $\left|\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\dfrac{k}{n})\right| \leqslant A_{\alpha,\beta}\left|t-\dfrac{k}{n}\right| = A_{\alpha,\beta}(t-\dfrac{k}{n})$, on a :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt\right| \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} A_{\alpha,\beta}(t-\frac{k}{n})\ dt = A_{\alpha,\beta}.\frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit : $\left|B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt\right| \leqslant n.\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n^2} = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}$.

III.B.2.c) Pour $x \in [0,1[$, les séries $\sum n^{\alpha-1}x^n$ et $\sum n^{\beta-1}x^n$ convergent absolument (séries entières de rayon de convergence 1), donc la série produit converge absolument et sa somme est le produit des sommes, soit $S_\alpha(x)S_\beta(x)$.

Le terme d'ordre n de la série produit vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}x^n = n^{\alpha+\beta-2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}x^n = n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n$$

On en déduit que : $S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n$.

Par différence : $S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}\left(u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)\right)x^n$.

Avec la majoration du 2.b, on obtient :

$\left|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}\left|u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)\right|x^n \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2}x^n = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)$.

En multipliant par $(1-x)^{\alpha+\beta}$:

$$\left|(1-x)^\alpha S_\alpha(x).(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha,\beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x)\right| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x)$$

Comme α, β, $\alpha+\beta$ et $\alpha+\beta-1$ sont tous supérieurs à 1, on peut utiliser la question II.B.2 :

$$(1-x)^\alpha S_\alpha(x).(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha,\beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

et $\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} 0$;

donc $\left|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\right| \leqslant 0$, *i.e* $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha,\beta) = 0$.

III.C -

III.C.1) Pour $\alpha \in]0,1[$, $1-\alpha \in]0,1[$, donc $B(\alpha, 1-\alpha)$ existe bien.

$B(\alpha,1-\alpha) = \int_0^1 f(\alpha,t)\,dt$ avec $f : (\alpha,t) \mapsto t^\alpha(1-t)^{-\alpha}$.

- Pour tout $\alpha \in]0,1[$, $t \mapsto f(\alpha,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$.
- Pour tout $t \in]0,1[$, $\alpha \mapsto f(\alpha,t)$ est continue sur $]0,1[$.
- Domination de f sur le segment $[a,b] \subset]0,1[$: $\forall t \in]0,1[, \forall \alpha \in [a,b], 0 \leqslant f(\alpha,t) \leqslant t^{a-1}(1-t)^{-b}$ et $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{-b}$ est indépendante de α et intégrable sur $]0,1[$ (comme au III.A.1).

D'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres, $\alpha \mapsto B(\alpha,1-\alpha)$ est continue sur $]0,1[$.

Rem : plus simplement, on pouvait remarquer, à l'aide de III.B, que l'on a $B(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$, donc la continuité résulte de clle de la fonction Γ.

III.C.2) -

III.C.2.a) D'abord, on a bien, compte tenu des hypothèses, $\frac{2p+1}{2q} \in]0,1[$.

D'après le III.A.2.ii, $B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1-\frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{(2(p-q)+1)/2q)}}{1+t}\,dt$.

Le changement de variable $u \mapsto t = u^{2q}$, difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même, permet d'obtenir :

$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1-\frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2(p-q)+1}}{1+u^{2q}}.2qu^{2q-1}\,du = 2q\int_0^{+\infty}\frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\,du$.

III.C.2.b) Les z_k, pour k compris entre 0 et $q-1$ et leurs opposés sont les $2q$ zéros de $X^{2q}+1$ (et ils sont simples). Comme $A = X^{2p}$ a un degré strictement inférieur à $B = X^{2q}+1$, la partie entière de la fraction rationnelle $\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ est nulle. Le développement en éléments simples de $\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ s'écrit donc :

$\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a_k}{X-z_k}+\frac{b_k}{X+z_k}\right)$, où les a_k et les b_k sont des nombres complexes définis par : $a_k = \dfrac{A(z_k)}{B'(z_k)}$ et $b_k = \dfrac{A(-z_k)}{B'(-z_k)}$.

Or $B' = 2qX^{2q-1}$ et $z_k^{2q} = -1$; donc $B'(z_k) = -\dfrac{2q}{z_k}$ et $B'(-z_k) = \dfrac{2q}{z_k}$; d'où la formule de l'énoncé.

III.C.2.c) • On peut vérifier ce qui est demandé par simple dérivation ...
Mais on le trouve aussi en écrivant $c = a + ib$ avec a, b réels et $b \neq 0$:

$$\frac{1}{t-c} = \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + i\frac{b}{(t-a)^2+b^2}$$

et en utilisant les primitives usuelles...

• Pour tout k compris entre 0 et $q-1$, la fonction :

$$\begin{aligned}\omega_k : t \mapsto \quad & \left(\frac{1}{2}\ln\left((t-\mathcal{R}e\, z_k)^2 + (\mathcal{I}m\, z_k)^2\right) + i\arctan\left(\frac{t-\mathcal{R}e\, z_k}{\mathcal{I}m\, z_k}\right)\right) \\ & \qquad - \left(\frac{1}{2}\ln\left((t+\mathcal{R}e\, z_k)^2 + (-\mathcal{I}m\, z_k)^2\right) + i\arctan\left(\frac{t+\mathcal{R}e\, z_k}{-\mathcal{I}m\, z_k}\right)\right) \\ & = \frac{1}{2}\ln\frac{(t-\mathcal{R}e\, z_k)^2+(\mathcal{I}m\, z_k)^2}{(t+\mathcal{R}e\, z_k)^2+(\mathcal{I}m\, z_k)^2} + i\left(\arctan\left(\frac{t-\mathcal{R}e\, z_k}{\mathcal{I}m\, z_k}\right)+\arctan\left(\frac{t+\mathcal{R}e\, z_k}{\mathcal{I}m\, z_k}\right)\right)\end{aligned}$$

est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-z_k} - \dfrac{1}{t+z_k}$.

Comme $\mathcal{I}m\, z_k = \sin\pi\dfrac{2k+1}{2q} > 0$, $\omega_k(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi i$; et $\omega_k(0) = 0$.

La fonction $\omega = -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\,\omega_k$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}$.

De plus, $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\pi i = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

On en déduit que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \lim_{+\infty}\omega - \omega(0) = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

Or $z_k^{2p+1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\left(e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}\right)^k$ et $e^{i\pi\frac{2p+1}{q}} \neq 1$;

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\frac{e^{i\pi\frac{2p+1}{q}q}-1}{e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}-1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\frac{e^{i\pi(2p+1)}-1}{e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}(e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}-e^{-i\pi\frac{2p+1}{2q}})} = \frac{-2}{2i\sin\pi\frac{2p+1}{2q}}$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\pi\frac{2p+1}{2q}}$.

III.C.3) Pour tout α de la forme $\alpha = \dfrac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, on a ainsi :

$B(\alpha, 1-\alpha) = 2q\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

Comme $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ et $\alpha \mapsto \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ sont continues sur $]0,1[$ et que l'ensemble des $\dfrac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, est dense dans $]0,1[$ (vérifiez que, si a et b sont des réels tels que $0 < a < b < 1$, on peut toujours trouver un rationnel de la forme $\dfrac{2p+1}{2q}$ dans l'intervalle $]a, b[$), on peut affirmer :

$$\forall\alpha \in]0,1[,\ B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

De plus, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha)\Gamma(\alpha + (1-\alpha)) = B(\alpha, 1-\alpha)$.

Partie IV : L'opérateur d'Abel

IV.A -

IV.A.1) La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,x[$ et, pour tout $t \in [0,x[$, on a $\left|\dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$; comme $t \mapsto \dfrac{1}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0,x[$ (intégrale de référence, avec $\alpha<1$), $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0,x[$, donc sur $]0,x[$.

IV.A.2) -

IV.A.2.a) Pour $x \in]0,1]$, on effectue le changement de variable affine $u \mapsto t = ux$, qui est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ sur $]0,x[$. La formule reste encore valable pour $x=0$ $(1-\alpha>0)$.

IV.A.2.b) Comme $x \mapsto x^{1-\alpha}$ est continue sur $[0,1]$, il suffit de montrer la continuité de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

- Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1[$;
- pour tout $t \in [0,1[$, $x \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$;
- domination sur $[0,1]$: pour tout $t \in [0,1[$ et tout $x \in [0,1]$, on a : $\left|\dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$; la fonction $t \mapsto \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ est continue, intégrable sur $[0,1[$ et indépendante de x.

Donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$; donc $\mathrm{A}_\alpha f$ est continue sur $[0,1]$.

IV.A.2.c) Par linéarité de l'intégrale, A_α est linéaire. D'après IV.A.2.b, A_α est bien un endomorphisme de E.

Continuité :

$\forall f \in \mathrm{E}, \forall x \in [0,1], \left|\mathrm{A}_\alpha f(x)\right| \leqslant x^{\alpha-1}.\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant 1.\int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \|f\|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,\|f\|.$

Donc, $\forall f \in \mathrm{E}$, $\|\mathrm{A}_\alpha f\| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}\|f\|$. On en déduit que l'endomorphisme A_α est continu et que $|||\mathrm{A}_\alpha||| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$.

De plus, si f est la fonction constante 1, $\|\mathrm{A}_\alpha f\| = \dfrac{1}{1-\alpha}\,\|f\|$. Donc $|||\mathrm{A}_\alpha||| = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

IV.B -

IV.B.1) -

IV.B.1.a) Pour $n=1$, on reprend la méthode de majoration du IV.A.2.c :

pour tout $x \in [0,1]$, $\left|\mathrm{A}_\alpha f(x)\right| \leqslant x^\beta \|f\| \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^\alpha} = x^\beta \|f\| \frac{1}{\beta} = x^\beta \|f\| \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)}$.

Soit $n \geqslant 1$; on suppose l'inégalité vraie au rang n : $\forall x \in [0,1], \left|\mathrm{A}_\alpha^n f(x)\right| \leqslant x^{n\beta}\dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|$.

Soit $x \in [0,1]$;

$$\left|\mathrm{A}_\alpha^{n+1} f(x)\right| = x^\beta \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{A}_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x^\beta \int_0^1 \frac{\left|\mathrm{A}_\alpha^n f(xt)\right|}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant x^\beta x^{n\beta}\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|\int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{A}_\alpha^{n+1} f(x)\right| &\leqslant x^{(n+1)\beta}\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\mathrm{B}(n\beta+1,1-\alpha)\|f\| = x^{(n+1)\beta}\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\mathrm{B}(n\beta+1,\beta)\|f\| \\ &= x^{(n+1)\beta}\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\frac{\Gamma(n\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\|f\| = x^{(n+1)\beta}\frac{\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\|f\|.\end{aligned}$$

ce qui établit le résultat à l'ordre $n+1$.

On a donc montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \left|\mathrm{A}_\alpha^n f(x)\right| \leqslant x^{n\beta}\dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|$.

IV.B.1.b) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\|A_\alpha^n f\right\| \leqslant \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\left\|f\right\|$. Autrement dit, l'endomorphisme A_α^n de E est continu (d'ailleurs, il s'agit de la composée d'applications continues !)et

$$|||A_\alpha^n||| \leqslant \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

IV.B.2) Soit $\gamma>0$; alors $\gamma^n\dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \dfrac{(\gamma\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \dfrac{1}{(\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)}}\dfrac{((\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)})^{n\beta+1}}{\Gamma(1+n\beta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'après I.3.

IV.B.3) -

IV.B.3.a) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left\|\lambda^n A_\alpha^n f\right\| \leqslant |\lambda|^n\dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\left\|f\right\|$.

Or $|\lambda|^n\dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\left\|f\right\| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n(2|\lambda|)^n\dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\left\|f\right\| = o\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$; donc la série $\sum|\lambda|^n\dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\left\|f\right\|$ converge et la série $\sum\lambda^n A_\alpha^n f$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

IV.B.3.b) Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $(id_E-\lambda A_\alpha)\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\lambda^n A_\alpha^n f = f-\lambda^{N+1}A_\alpha^{N+1}f$.

Or $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge uniformément sur [0,1] vers g ; $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ est une suite d'éléments de E (*i.e* de fonctions continues), donc g est continue ($g\in E$) et $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge vers g dans E.

Comme $id_E-\lambda A_\alpha$ est continu dans E, $\left((id_E-\lambda A_\alpha)\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge dans E, *i.e* uniformément sur $[0,1]$ vers $(id_E-\lambda A_\alpha)g$.

D'autre part, $\left(\lambda^{N+1}A_\alpha^{N+1}f\right)_N$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, *i.e* converge vers 0 dans E.

Donc $(id_E-\lambda A_\alpha)g=f$.

IV.B.3.c) D'après la question précédente, $(id_E-\lambda A_\alpha)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n A_\alpha^n = id_E$.

On montre de même : $\forall f\in E$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n A_\alpha^n\right)(id_E-\lambda A_\alpha)f=f$, *i.e* $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n A_\alpha^n\right)(id_E-\lambda A_\alpha)=id_E$.

Donc $id_E-\lambda A_\alpha$ est inversible dans E, d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n A_\alpha^n$.

IV.C -

IV.C.1) -

IV.C.1.a) $A_\alpha e_n(x) = x^\beta\displaystyle\int_0^1\frac{(xt)^n}{(1-t)^\alpha}\,dt = x^{\beta+n}B(n+1,\beta) = x^{\beta+n}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}$;

donc $A_\alpha e_n = B(n+1,\beta)e_{n+\beta} = \dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}e_{n+\beta}$ en prolongeant la définition des e_k à k réel positif.

IV.C.1.b)

$$\begin{aligned}(A_{1-\alpha}\circ A_\alpha)e_n &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}A_{1-\alpha}(e_{n+\beta}) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}.\frac{\Gamma((n+\beta)+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma((n+\beta)+1+(1-\beta))}e_{(n+\beta)+1-\beta}\\ &= \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)}e_{n+1} = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{n+1}e_{n+1} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{e_{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

IV.C.2) Vrai par linéarité ...

IV.C.3) -

IV.C.3.a) Pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{P}f$ est bien continu ; de plus, P est linéaire.
Soit $f \in \mathrm{E}$; alors $\forall x \in [0,1], \left|\mathrm{P}f(x)\right| \leqslant \int_0^x \left|f(t)\right| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \left\|f\right\| \,\mathrm{d}t = \left\|f\right\| x \leqslant \left\|f\right\|$; donc $\left\|\mathrm{P}f\right\| \leqslant \left\|f\right\|$.
Donc P est linéaire continu et $|||\mathrm{P}||| \leqslant 1$.
De plus, si f est l'application constante 1, alors $\mathrm{P}f : x \mapsto x$; donc $\left\|\mathrm{P}f\right\| = \left\|f\right\|$. Donc $|||\mathrm{P}||| = 1$.

IV.C.3.b) L'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions polynômiales sur $[0,1]$ est dense dans E pour la norme $\|.\|$ (théorème de Weierstrass). Comme B_α et $\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}\mathrm{P}$ sont deux applications continues sur E coïncidant sur $\mathscr{P}$, elles sont égales.

IV.C.3.c) Comme P est à valeurs dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$, $\mathrm{D} \circ \mathrm{B}_\alpha$ est bien défini. Comme $\mathrm{D} \circ \mathrm{P} = id_{\mathrm{E}}$, on a la formule de l'énoncé.

IV.C.3.d) Soit $f \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{A}_\alpha f = 0$; alors $\mathrm{B}_\alpha f = 0$, donc $\mathrm{P} \circ \mathrm{B}_\alpha f = 0$; avec la relation du (IV.C.3.c), $f = 0$.
Donc l'opérateur (linéaire) A_α est injectif.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆