PSI* 2011-2012

DM n° 3 pour le 14/10/2011

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objet du problème est l'étude d'une famille de fonctions polynomiales appelées fonctions polynômes de Newton. La première partie les introduit de manière algébrique. La deuxième partie, tout en étant liée à la première, développe des thèmes relevant de l'analyse.

Partie I :

Dans toute cette partie, on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et lorsque r est un entier naturel, on désignera par $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des fonctions polynomiales allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à r.

Etant donné Q appartenant à $\mathcal{P}$, on se propose de déterminer toutes les fonctions polynomiales P vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1)-P(x)=Q(x)$.

A cet effet, on introduit l'application Δ de $\mathcal{P}$ dans lui-même définie lorsque $P \in \mathcal{P}$ par la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta(P)(x)=P(x+1)-P(x)$.

1°) a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

b) Pour $P \in \mathcal{P}$ de degré r strictement positif, calculer le degré de la fonction polynomiale $\Delta(P)$.

c) Montrer alors que le noyau de Δ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.

2°) On considère pour $r \in \mathbb{N}^*$ l'application $\Delta_r : \mathcal{P}_r \to \mathcal{P}_r ; P \mapsto \Delta_r(P) = \Delta(P)$.

a) Justifier la définition de Δ_r et montrer que Δ_r est linéaire.

b) Quel est le noyau de Δ_r ?

c) Montrer alors que $\operatorname{Im} \Delta_r = \mathcal{P}_{r-1}$.

d) En déduire que l'application Δ est surjective.

3°) On désigne par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ constitué par les fonctions polynomiales s'annulant en 0. Montrer que la restriction de Δ à $\mathcal{E}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$.

4°) a) Déduire de la question précédente qu'il existe une suite et une seule d'éléments de $\mathcal{P}$ vérifiant : $N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.

(N_n s'appelle fonction polynomiale de Newton d'indice n.)

b) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul et tout x réel :

$$N_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k).$$

c) Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}$, la famille $(N_n)_{n \in [\![0,r]\!]}$ forme une base de $\mathcal{P}_r$. En déduire que la famille $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathcal{P}$.

d) On adopte la notation usuelle : $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

Prouver que pour toute fonction polynomiale Q de degré r : $Q = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0) N_n$. Justifier ensuite l'écriture $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(Q)(0) N_n$.

e) La fonction polynomiale Q étant ainsi décomposée, déterminer les fonctions polynomiales P vérifiant la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = Q(x)$.

f) Application : en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} Q(k)$ faisant intervenir P.

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

5°) Etablir, pour toute fonction polynomiale Q, pour tout entier naturel n et tout réel x, la relation : $\Delta^n(Q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i)$.

6°) Dans toute cette question, on suppose que $r \in \mathbb{N}^*$.

a) On désigne par $C(\Delta_r)$ le commutant de Δ_r dans l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)$ des endomorphismes de $\mathcal{P}_r$, c'est à dire $C(\Delta_r) = \{ g \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_r) \mid g \circ \Delta_r = \Delta_r \circ g \}$.

i. Pour g et h appartenant à $C(\Delta_r)$, montrer que, si $g(N_r) = h(N_r)$, alors g = h.

ii. Soit g un endomorphisme de $\mathcal{P}_r$. Justifier l'existence de $a_0, a_1, \dots, a_r$ réels tels que : $g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \dots + a_1 N_1 + a_0 N_0$.

iii. En déduire que $C(\Delta_r)$ est de dimension r + 1 et qu'il admet pour base : $\left(Id_{\mathcal{P}},(\Delta_r)^1,\ldots,(\Delta_r)^{r-1},(\Delta_r)^r\right)$.

iv. On introduit l'endomorphisme d de $\mathcal{P}$ qui à une fonction polynomiale P associe sa fonction dérivée P'. Montrer que $d\circ\Delta=\Delta\circ d$. En supposant qu'il existe $a_0,a_1,\ldots,a_r$ réels tels que $d=a_0 Id_{\mathcal{P}}+a_1(\Delta)^1+\ldots+a_r(\Delta)^r$, calculer $d(N_{r+1})$. Conclure à une contradiction.

b) Préciser la matrice de Δ_r dans la base $(N_n)_{n\in[\![0,r]\!]}$. Montrer que $(\Delta_r)^{r+1}=0$. L'endomorphisme Δ_r est-il diagonalisable ?

c) Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathcal{P}_r$ tels que $g\circ g=\Delta_r$?

Partie II :

On note toujours $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie pour tout x réel par : $N_0(x)=1$ et pour tout entier naturel n non nul $N_n(x)=\dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

1°) recherche d'un équivalent de $|N_n(x)|$ lorsque $n\to+\infty$:

On fixe x un réel non égal à un entier naturel.

Pour t réel, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=n^t|N_n(x)|$.

a) Préciser, selon le réel t, la nature de la série de terme général $v_n=\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

b) Que conclure pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

En déduire qu'il existe un réel strictement positif noté $C(x)$ tel que $|N_n(x)|\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$.

2°) Série de Newton associée à une fonction :

On considère une application f de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

A cette application, on associe la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$.

a) Soit b > 0, préciser la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque f est l'application $x\mapsto b^x$.

b) Pour n entier naturel, on note Q la fonction polynomiale $\sum_{k=0}^{n}a_kN_k$.

Justifier que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $a_k=\Delta^k(Q)(0)$.

Montrer alors que la fonction $x\mapsto f(x)-Q(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kN_k(x)$ s'annule en $0,1,\ldots n$.

c) On suppose de plus que f est indéfiniment dérivable sur $[0,+\infty[$. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout x réel positif, il existe un réel θ tel que :

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kN_k(x)+N_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\theta)$.

Indication : on pourra utiliser, lorsque $x\notin[\![0,n]\!]$, la fonction auxiliaire

$\varphi : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(t) - N_{n+1}(t) A$, avec A un réel choisi tel que $\varphi(x) = 0$ et appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.

d) On note toujours f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant la propriété suivante :

il existe une constante M strictement positive telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n} \leq M$.

Montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x)$.

En déduire que si une telle fonction s'annule sur $\mathbb{N}$, c'est la fonction nulle.

3°) Etude de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} h^n N_n(x)$ avec h réel :

a) Lorsque $|h| > 1$, montrer que la série de terme général $h^n N_n(x)$ est divergente pour tout x réel, non égal à un entier naturel.

b) On suppose que $|h| < 1$.

i. Montrer que la série de terme général $h^n N_n(x)$ est absolument convergente pour tout x réel.

ii. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que pour tout n entier naturel et tout x réel :

$(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x) = (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du$, puis établir que la suite

$$\left(\frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du\right)_{n \in \mathbb{N}}$$ est bornée.

iii. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n N_n(x)$.

c) On suppose que $h = 1$.

i. Montrer que la série de terme général $N_n(x)$ est divergente pour $x \leq -1$.

ii. En reprenant la méthode préconisée au II.3.b), établir que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} N_n(x)$ est convergente pour $x > -1$ et que : $\forall x > -1, \sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x$.

d) On suppose que $h = -1$.

i. Préciser les réels x pour lesquels la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ?

ii. Justifier pour tout x réel et tout entier naturel n strictement positif la formule :

$N_0(x) - N_1(x) + \ldots + (-1)^n N_n(x) = (-1)^n N_n(x-1)$

iii. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n N_n(x)$ lorsque $x \geq 0$.

***