CORRIGÉ DU DS°8

Problème 1 CCP PSI 1999

PARTIE I.

I.1/ On note déjà que les solutions de l'équation homogène sont les applications de la forme

$$t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t$$

I.1.1/ Lorsque $\delta = 0$, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
On en déduit que les solutions réelles de (E) lorsque $\delta = 0$ sont les applications de la forme

$$y : t \mapsto \alpha t^2 + \beta t + (\gamma - 2\alpha) + \lambda \cos t + \mu \sin t$$

où λ et μ sont deux réels arbitraires.

I.1.2/ De même, lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 0$, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $at\cos(t) + bt\sin(t)$ car $\cos t = \mathscr{Re}(e^{it})$ et i est racine d'ordre 1 de l'équation caractéristique $r^2 + 1$ associée à (E).
On trouve que les solutions réelles de (E) lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 0$ sont les applications de la forme :

$$y : t \mapsto \frac{\delta}{2} t \sin t + \lambda \cos t + \mu \sin t$$

où λ et μ sont deux réels arbitraires.

I.1.3/ D'après le principe de superposition, dans le cas général, les solutions réelles de (E) sont les applications :

$$y : t \mapsto \alpha t^2 + \beta t + (\gamma - 2\alpha) + \frac{\delta}{2} t \sin t + \lambda \cos t + \mu \sin t$$

où λ et μ sont deux réels arbitraires.

I.2/ -

I.2.1/ F est 2π-périodique et sa restriction à $]-\pi, \pi[$ est paire, donc F est paire et $\forall n \in \mathbb{N}, b_n(F) = 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(F) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt \; dt$ donc $a_0(F) = \frac{2\pi^2}{3}$ et pour $n \geqslant 1$, en intégrant deux fois par parties :

$$a_n(F) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2 \sin nt}{n} + \frac{2t\cos nt}{n^2} - \frac{2\sin nt}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

La série de Fourier de F s'écrit donc :

$$S(f) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$$

I.2.2/ On a $\lim\limits_{t\to\pi^-} F(t) = F(\pi) = \pi^2$ et, en utilisant la 2π-périodicité, $\lim\limits_{t\to\pi^+} F(t) = \lim\limits_{t\to-\pi^+} F(t) = (-\pi)^2$, donc F est continue en π, et, par suite, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
La restriction de F à $[-\pi, \pi]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et, par périodicité, F est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de convergence normale et le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de F converge normalement, donc simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme F.

I.3/ -

I.3.1/ Posons pour k entier naturel supérieur ou égal à 2 et t réel,

$$f_k(t) = \frac{(-1)^k \cos(kt)}{k^2(k^2-1)} \quad g_k(t) = \frac{(-1)^k \sin(kt)}{k(k^2-1)} \quad h_k(t) = \frac{(-1)^k \cos(kt)}{(k^2-1)}$$

Alors f_k, g_k et h_k sont bornées sur $\mathbb{R}$ et

$$\|f_k\|_\infty = \frac{1}{k^2(k^2-1)} \quad \|g_k\|_\infty = \frac{1}{k(k^2-1)} \quad \|h_k\|_\infty = \frac{1}{(k^2-1)}$$

Les trois séries numériques $\sum\|f_k\|_\infty$, $\sum\|g_k\|_\infty$ et $\sum\|h_k\|_\infty$ sont donc convergentes car leur terme général est dominé par $\dfrac{1}{k^2}$ qui est le terme général d'une série positive convergente. Les séries de fonctions $\sum f_k$, $\sum g_k$, $\sum h_k$ sont donc normalement convergentes sur $\mathbb{R}$, donc leurs sommes f, g, h sont définies sur $\mathbb{R}$.

I.3.2/ Pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, f_k$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus $\sum f_k$ converge simplement car normalement sur $\mathbb{R}$, $\sum f_k' = \sum -g_k$ et $\sum f_k'' = \sum -h_k$ convergent uniformément car normalement sur $\mathbb{R}$ donc $f = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} f_k$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} f_k'(t) = -g(t) \text{ et } f''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} f_k''(t) = -h(t)$$

I.3.3/ $f'(0) = -g(0) = 0$

I.3.4/ $f''(\pi) = -h(\pi) = -\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cos(k\pi)}{k^2-1} = -\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}$.

Comme $\dfrac{-1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k-1}$ on a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{-1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-1-\frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{3}{4}$$

d'où $f''(\pi) = -\dfrac{3}{4}$.

I.3.5/ D'après I.3.2., pour tout réel t,

$$f''(t)+f(t) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k^2-1)k^2}\cos(kt)[1-k^2] = -\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cos(kt)}{k^2}$$

Le développement en série de Fourier de F obtenu en I.2 s'écrit :

$$\forall t \in]-\pi,\pi],\ \mathrm{F}(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos t + 4\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt)$$

donc

$$\forall t \in]-\pi,\pi],\ f''(t)+f(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{\pi^2}{12} - \cos t = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta\cos t$$

avec $\alpha = -\dfrac{1}{4}, \beta = 0, \gamma = \dfrac{\pi^2}{12}$ et $\delta = -1$.

I.3.6/ D'après I.1., il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in]-\pi,\pi],\ f(t) = \frac{-t^2}{4} + \left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}\right) - \frac{t\sin t}{2} + \lambda\cos t + \mu\sin t$$

Cette expression de f valable en particulier sur $]-\pi,\pi[$ prouve que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle comme combinaison linéaire de telles fonctions. En outre,

$$\forall t \in]-\pi,\pi[,\ f'''(t) + f'(t) = -\frac{t}{2} + \sin t$$

I.3.7/ D'après I.3.6 et par périodicité, f''' est définie en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. De plus,

$$f'''(t) \underset{t\to\pi^-}{\longrightarrow} f'(\pi) - \frac{\pi}{2} \text{ et } f'''(t) \underset{t\to-\pi^+ \text{ ou } \pi^+}{\longrightarrow} f'(-\pi) + \frac{\pi}{2} = f'(\pi) + \frac{\pi}{2}$$

Donc f''' n'est pas continue en π et f n'est pas de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

I.3.8/ On a vu qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t\in]-\pi,\pi],\ f(t)=\frac{-t^2}{4}+\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}\right)-\frac{t\sin t}{2}+\lambda\cos t+\mu\sin t$$

La parité de f impose $\mu=0$. Par dérivation, on a

$$\forall t\in]-\pi,\pi],\ f''(t)=-\frac{1}{2}-\cos t+\frac{t\sin t}{2}-\lambda\cos t$$

De $f''(\pi)=-\dfrac{3}{4}$, on déduit alors $\lambda=\dfrac{5}{4}$. Finalement,

$$\forall t\in]-\pi,\pi],\ f(t)=\frac{-t^2}{4}+\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}\right)-\frac{t\sin t}{2}-\frac{5}{4}\cos t$$

PARTIE II.

II.1/ φ_1 est bien élément de $\mathscr{CM}_{2\pi}$ donc possède des coefficients de Fourier. Par imparité, on a $\forall n\in\mathbb{N}, a_n(\varphi_1)=0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, b_n(\varphi_1)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi\sin nt\ dt=2\times\frac{(1-(-1)^n)}{n}$$

On en déduit que $c_0(\varphi_1)=\dfrac{a_0(\varphi)}{2}=0$, et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ c_n(\varphi_1)=\frac{a_n(\varphi_1)-ib_n(\varphi_1)}{2}=\begin{cases}0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ \dfrac{2}{in} \text{ sinon}\end{cases}$$

De plus, φ_1 étant à valeurs réelles, $c_n(\varphi_1)$ et $c_{-n}(\varphi_1)$ sont conjugués. On a donc $\mathrm{S}_{2n+1}(\varphi_1)=4\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$.

Comme la série $\displaystyle\sum\frac{1}{2k+1}$ est positive divergente, on a $(\mathrm{S}_{2n+1}(\varphi_1))$ est divergente donc $(\mathrm{S}_n(\varphi_1))$ est divergente.

II.2/ Les théorèmes usuels assurent que ψ_h est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, on vérifie facilement que φ étant 2π-périodique, ψ_h est également 2π-périodique.

II.3/ Pour tout entier k,

$$\begin{aligned}
c_k(\psi_h) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t+h)\mathrm{e}^{-ikt}\ dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t-h)\mathrm{e}^{-ikt}\ dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}\varphi(u)\mathrm{e}^{-ik(u-h)}\ du-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-h}^{\pi-h}\varphi(u)\mathrm{e}^{-ik(u+h)}\ du\\
&= (\mathrm{e}^{ikh}-\mathrm{e}^{-ikh})c_k(\varphi)\\
&= 2i\sin(kh)c_k(\varphi)
\end{aligned}$$

II.4/ ψ_h est continue par morceaux (car continue) et 2π-périodique donc d'après l'inégalité de Bessel, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \sum_{k=-n}^{n}|c_k(\psi_h)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\psi_h(t)|^2\ dt$$

donc

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \sum_{k=-n}^{n}\sin^2(kh)|c_k(\varphi)|^2=\frac{1}{4}\sum_{k=-n}^{n}|c_k(\psi_h)|^2\leqslant\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\psi_h(t)|^2\ dt$$

d'où le résultat souhaité puisque ψ_h est à valeurs réelles.

II.5/ Comme φ vérifie la condition $\mathscr{L}$, on a

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ |\psi_h(t)|\leqslant \mathrm{A}_1|2h|^s$$

d'où

$$\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_h^2(t)\ dt\leqslant 4^{s-1}h^{2s}\mathrm{A}_1^2$$

ce qui fournit l'inégalité souhaitée avec $\mathrm{A}_2=4^{s-1}\mathrm{A}_1^2$.

II.6/ -

II.6.1/ $\mathrm{H}(p)$ est égal à deux fois le cardinal de $[\![2^{p-1}, 2^p - 1]\!]$ soit

$$\mathrm{H}(p) = 2(2^p - 1 - 2^{p-1} + 1) = 2^p$$

II.6.2/ Si $k \in \mathrm{I}_p$, on a

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{|k|\pi}{2^{p+1}} \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{p+1}} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

La fonction sinus est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et impaire d'où

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \leqslant \sin\frac{|k|\pi}{2^{p+1}} = \left|\sin\left(\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right)\right|$$

La croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ fournit alors l'inégalité souhaitée.

II.6.3/ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. Soit $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\langle x|u\rangle^2 \leqslant \|u\|^2 \, \|x\|^2$$

ce qui démontre l'inégalité

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

En appliquant cette inégalité à la famille de réels $(|c_k(\varphi)|)_{k\in\mathrm{I}_p}$,qui est bien de cardinal 2^p, on obtient l'inégalité demandée.

II.6.4/ On suppose $s > \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{(\mathrm{H}(p))^{\frac{1}{2}}}{(2^{p+1})^s} = \frac{2^{\frac{p}{2}}}{2^{ps+s}} = \frac{1}{2^s}\left(\frac{1}{2^{s-\frac{1}{2}}}\right)^p$$

est le terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2^{s-\frac{1}{2}}}$ qui est de module strictement inférieur à 1 puisque $s > \dfrac{1}{2}$ donc est convergente. La suite des sommes partielles de cette série est donc majorée par un réel que nous noterons M dans la suite de cette question.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $2^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{p_0} > n$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n(\varphi) &\leqslant \mathrm{S}_{2^{p_0}-1}(\varphi) = |c_0(\varphi)| + \sum_{p=1}^{p_0}\sum_{k\in\mathrm{I}_p}|c_k(\varphi)| \\
&\leqslant |c_0(\varphi)| + \sum_{p=1}^{p_0}\sqrt{\mathrm{H}(p)}\sqrt{\sum_{k\in\mathrm{I}_p}|c_k(\varphi)|^2}
\end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de II.6.3.
Or pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathrm{I}_p}|c_k(\varphi)|^2 &\leqslant \sum_{k\in\mathrm{I}_p}2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right)|c_k(\varphi)|^2 \text{ d'après II.6.2} \\
&\leqslant \sum_{k=-2^p+1}^{2^p-1}2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right)|c_k(\varphi)|^2 \text{ car } \mathrm{I}_p \subset [\![-2^p+1, 2^p-1]\!] \\
&\leqslant 2\mathrm{A}_2\left(\frac{\pi}{2^{p+1}}\right)^{2s} \text{ d'après II.5}
\end{aligned}$$

D'où

$$0 \leqslant \mathrm{S}_n(\varphi) \leqslant |c_0(\varphi)| + \sqrt{2\mathrm{A}_2}\,\pi^s\left(\sum_{p=1}^{p_0}\frac{\sqrt{\mathrm{H}(p)}}{(2^{p+1})^s}\right) \leqslant |c_0(\varphi)| + \sqrt{2\mathrm{A}_2}\,\pi^s\mathrm{M}$$

$(\mathrm{S}_n(\varphi))$ est une suite croissante majorée donc est convergente.

PARTIE III.

III.1/ $c_n(\varphi_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sigma e^{-int}\,dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0 \\ \sigma \text{ sinon} \end{cases}$

On en déduit que $M_n(\varphi_0) = \sigma I_n$ possède comme unique valeur propre σ.

III.2/ -

III.2.1/ Les calculs des $c_n(\varphi_1)$ ont déjà été faits en II.1. On obtient $M_3(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix}$

III.2.2/ $\det(M_3(\varphi_1) - XI_3) = X(-X^2+8)$ d'où l'on déduit que $M_3(\varphi_1)$ admet trois valeurs propres simples égales à $0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$.

III.3/ -

III.3.1/ Avec les notations de I.3., on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(t)\right)\,dt$$

avec $u_n(t) = f_n(t)e^{-ikt}$. Pour tout $n \geqslant 2, u_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $N_\infty(u_n) = N_\infty(f_n) = \dfrac{1}{n^2(n^2-1)}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$ donc par le théorème d'intégration pour les séries de fonctions uniformément convergentes sur un segment, on a

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\,dt\right)$$

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+k)t}\,dt\right] = \frac{1}{2}(\delta_{n,k} + \delta_{n,-k})$$

D'où

$$c_k(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \in \{-1,0,1\} \\ \frac{(-1)^k}{2k^2(k^2-1)} \text{ si } k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\} \end{cases}$$

III.3.2/ $M_3(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(M_3(f) - XI_3) = -X^3 + \frac{1}{24}X$ donc $M_3(f)$ admet trois valeurs propres simples égales à $0, \frac{1}{24}, -\frac{1}{24}$.

III.4/ Si φ est paire (resp.impaire), on a $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\varphi) = c_{-n}(\varphi)$ (resp. $c_n(\varphi) = -c_{-n}(\varphi)$)donc ${}^tM_n(\varphi) = M_n(\varphi)$ (resp. ${}^tM_n(\varphi) = -M_n(\varphi)$)

III.5/ On sait que $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\lambda_r = \mathrm{tr}(M_n(\varphi))$ donc

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\lambda_r = \frac{\mathrm{tr}(M_n(\varphi))}{n} = c_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt$$

III.6/ -

III.6.1/

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k e^{ikt}\right|^2\varphi(t)\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{z_j}e^{-ijt}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k e^{ikt}\right)\varphi(t)\,dt \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{z_j}z_k\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t}\varphi(t)\,dt \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{z_j}z_k 2\pi c_{j-k}(\varphi)\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\theta(n,\varphi,Z)=\sum_{j=1}^{n}\overline{z_j}(M_n(\varphi)Z)_j=\sum_{j=1}^{n}\overline{z_j}\left(\sum_{k=1}^{n}c_{j-k}(\varphi)z_k\right)$$

On en déduit que

$$\theta(n,\varphi,Z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k e^{ikt}\right|^2\varphi(t)\,dt$$

III.6.2/ Soit λ une valeur propre de $M_n(\varphi)$ et $Z\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. On a alors ${}^t\overline{Z}M_n(\varphi)Z=\lambda{}^t\overline{Z}.Z$ c'est-à-dire $\theta(n,\varphi,Z)=\lambda\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$. Or $\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2>0$ puisque $Z\neq 0$ en tant que vecteur propre d'où

$$\lambda=\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k e^{ikt}\right|^2\varphi(t)\,dt}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}$$

ce qui prouve que $\lambda\in\mathbb{R}$ l'intégrale au numérateur étant réelle puisque l'intégrande est à valeurs réelles.

III.6.3/ Si de plus $\varphi(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^+$, l'intégrale précédente est élément de $\mathbb{R}^+$ (intégrale d'une fonction positive sur le segment $[-\pi,\pi]$) donc $\lambda\in\mathbb{R}^+$.

III.6.4/ Dans le cas particulier où on prend $\varphi=\varphi_0$ introduite au III.1. pour $\sigma=1$, on a $M_n(\varphi)=I_n$ donc tout vecteur non nul est vecteur propre de $M_n(\varphi)$ pour la valeur propre 1 donc $\forall Z\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$, on a

$$1=\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k e^{ikt}\right|^2 dt}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}$$

Soit maintenant $\varphi\in\mathscr{CM}(2\pi)$ telle que $\varphi(\mathbb{R})\subset[a,b]$. Soit λ valeur propre de $M_n(\varphi)$ dont on sait déjà qu'elle est réelle et Z un vecteur propre associé. On a alors

$$\begin{aligned}a=\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k e^{ikt}\right|^2 a\,dt}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}\quad&\leq\quad\lambda=\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k e^{ikt}\right|^2\varphi(t)\,dt}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}\\&\leq\quad b=\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k e^{ikt}\right|^2 b\,dt}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}\end{aligned}$$

Donc le spectre de $M_n(\varphi)$ est inclus dans $[a,b]$.

III.7/ -

III.7.1/ Rappelons que comme φ est à valeurs réelles on a $\forall n\in\mathbb{Z}, c_{-n}=\overline{c_n}$. D'où

$$\operatorname{tr}((M_n(\varphi))^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_{j,k}\mu_{k,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{j-k}c_{k-j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|c_{j-k}|^2$$

On en déduit que

$$\operatorname{tr}((M_n(\varphi))^2=n|c_0|^2+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)|c_k|^2$$

III.7.2/ On sait qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}M_n(\varphi)P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a dans ces conditions $P^{-1}M_n(\varphi)^2P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\lambda_r^2 = \frac{1}{n}\mathrm{tr}((M_n(\varphi)^2) = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)|c_k|^2$$

III.7.3/ Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$ et $S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Montrons que $(\frac{B_n}{n})$ converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme (S_n) converge vers S, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |S - S_n| = S - S_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n \geqslant n_0$. On a alors

$$0 \leq \frac{B_n}{n} = \frac{B_{n_0}}{n} + \sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{k}{n}u_k \leq \frac{B_{n_0}}{n} + (S - S_{n_0}) \leq \frac{B_{n_0}}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or $\frac{B_{n_0}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1, 0 \leqslant \frac{B_{n_0}}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Dans ces conditions, on a

$$\forall n \geqslant \max(n_0, n_1), 0 \leqslant \frac{B_n}{n} \leqslant \varepsilon$$

ce qui achève de prouver le résultat annoncé.

III.7.4/ D'après III.7.2.,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_r^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}|c_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}|c_k|^2$$

Or $\varphi \in \mathcal{CM}(2\pi)$ donc vérifie la formule de Parseval, à savoir

$$|c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}|c_k|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(t)\,dt$$

et comme la série $\sum |c_k|^2$ est convergente, d'après III.7.3.,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}|c_k|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_r^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(t)\,dt$$

-

Problème 2 : CENTRALE PSI 2002

Résultats préliminaires

A - • Vect(h) étant un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel, l'égalité

$$\mathscr{C} = \text{Vect}(h) \oplus \text{Vect}(h)^{\perp}$$

résulte directement d'un théorème du cours.

• L'inclusion Vect(h) $\subset \left(\text{Vect}(h)^{\perp}\right)^{\perp}$ est évidente : tout vecteur de Vect(h) est évidemment orthogonal aux vecteurs de Vect(h)$^{\perp}$!
Inversement, soit $f \in \left(\text{Vect}(h)^{\perp}\right)^{\perp}$. On décompose f sous la forme $f = \Pi_h(f) + g$, avec $\Pi_h(f)$ le projeté orthogonal de f sur Vect(h)$^{\perp}$ et $g \in$ Vect(h). Alors $\left\langle \Pi_h(f) \middle| f \right\rangle = 0$ puisque $f \in \left(\text{Vect}(h)^{\perp}\right)^{\perp}$ et $\left\langle \Pi_h(f) \middle| g \right\rangle = 0$ puisque $\Pi_h(f) \in \text{Vect}(h)^{\perp}$ donc $\left\langle \Pi_h(f) \middle| \Pi_h(f) \right\rangle = \left\langle \Pi_h(f) \middle| f - g \right\rangle = 0$, d'où $\Pi_h(f) = 0$ et $f \in \text{Vect}(h)$.
Cela prouve l'inclusion inverse.

• Le projeté orthogonal de f sur la droite Vect(h) est $g = \dfrac{\langle f | h \rangle}{\|h\|_2^2} h$ (formule du cours), donc $\Pi_h(f) = f - g$, ce qui donne la formule de l'énoncé.

B - • Notons d l'application définie sur $\mathscr{A}$ par $d(\xi) = \xi''$. $\mathscr{A}$ étant formée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, d est bien à valeurs dans $\mathscr{C}$.
d est trivialement linéaire.
Montrons que d est à valeurs dans $\mathscr{H}$, c'est-à-dire que, pour $\xi \in \mathscr{A}$, ξ'' est orthogonal à u. Cela résulte du calcul ci-dessous :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \xi'' \middle| u \right\rangle = \int_0^1 (1-t)\xi''(t)\,dt = \left[(1-t)\xi'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \xi'(t)\,dt = -\xi'(0) + \xi(1) - \xi(0) = 0$$

puisque ξ est un mouvement admissible.

• Soit φ l'application qui à $z \in \mathscr{H}$ associe l'application $\xi : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 (t-s)z(s)\,ds$.
La linéarité de φ ne pose pas de problème.
Si $\xi = \varphi(z)$, on a, pour $t \in [0,1]$: $\xi(t) = t\displaystyle\int_0^t z(s)\,ds - \int_0^t sz(s)\,ds$, ce qui prouve que ξ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\xi'(t) = \displaystyle\int_0^t z(s)\,ds + tz(t) - tz(t) = \int_0^t z(s)$, donc ξ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et $\xi''(t) = z(t)$.
Les égalités précédentes montrent aussi que $\xi(0) = \xi'(0) = 0$. De plus, $\xi(1) = \displaystyle\int_0^1 (1-s)z(s)\,ds = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle z | u \rangle = 0$ puisque $u \in \mathscr{H}$, ce qui montre que ξ appartient bien à $\mathscr{A}$ et que φ est bien une application linéaire de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{A}$.

• La relation $\xi'' = z$ trouvée ci-dessus montre que $d \circ \varphi = \text{Id}_{\mathscr{H}}$.
Inversement, si $z = d(\xi)$ avec $\xi \in \mathscr{A}$, on a $\varphi(z)(t) = \displaystyle\int_0^t (t-s)\xi''(s)\,ds = \xi(t) - \xi(0) - t\xi'(0)$ d'après la formule de Taylor avec reste intégrale (ou en intégrant par parties directement !), donc $\varphi(z)(t) = \xi(t)$ puisque ξ est un mouvement admissible, ce qui prouve que $\varphi \circ d = \text{Id}_{\mathscr{A}}$.

• En conclusion, φ et d sont bien des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Partie I - Comportement asymptotique de racines d'équations

I.A - Pour $k, \ell \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left\langle e_k \middle| e_\ell \right\rangle = 2\int_0^1 \cos(\omega_k t)\cos(\omega_\ell t)\,dt = \int_0^1 \left[\cos(\omega_k + \omega_\ell)t + \cos(\omega_k - \omega_\ell)t\right] dt$$

donc

- pour $k=\ell$, $\langle e_k | e_k\rangle = \int_0^1 [\cos(2\omega_k)t+1]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [\cos(2k+1)\pi t+1]\,\mathrm{d}t = 1$
- pour $k\neq\ell$, $\langle e_k | e_\ell\rangle = \left[\dfrac{\sin(\omega_k+\omega_\ell)t}{\omega_k+\omega_\ell}+\dfrac{\sin(\omega_k-\omega_\ell)t}{\omega_k-\omega_\ell}\right]_0^1 = 0$ puisque $\omega_k+\omega_\ell$ et $\omega_k-\omega_\ell$ sont des multiples de π.

La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bien orthonormale pour le produit scalaire considéré.

I.B - -

I.B.1) $\tilde f$ étant paire, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative. Compte tenu de la définition, le point de coordonnées $(1,0)$ est centre de symétrie. On a aussi comme éléments de symétrie tous ceux qui se déduisent des précédents par 4-périodicité.

Puisque f est continue, $\tilde f$ est évidemment continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, les points de discontinuité ne pouvant être que des points entiers. De plus, $\tilde f$ est continue en 0 puisqu'elle est paire ; elle est aussi continue en 2 puisque, par 4-périodicité, $\lim\limits_{t\to 2^+}\tilde f(t) = \lim\limits_{t\to -2^+}\tilde f(t)$ et $\lim\limits_{t\to -2^+}\tilde f(t) = \lim\limits_{t\to -2^+}\tilde f(-t) = \lim\limits_{u\to 2^-}\tilde f(u)$ par parité.

Par périodicité, $\tilde f$ sera donc continue aussi aux points entiers pairs. Elle sera continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est en 1 (car alors, pour les mêmes raisons que ci-dessus, elle le sera en -1, puis, par périodicité, en tous les points entiers impairs). Cela équivaut à dire que $f(1)=0$.

I.B.2) • Pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_{2k+1}(\tilde f) &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\tilde f(t)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^2 \tilde f(t)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 f(t)\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t - \int_1^2 f(2-t)\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 f(t)\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(u)\cos(2\omega_k-\omega_k u)\,\mathrm{d}u \quad \text{chgt de variable } u=2-t\\
&= \int_0^1 f(t)\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(u)\cos(\omega_k u)\,\mathrm{d}u \quad \text{car } 2\omega_k=(2k+1)\pi\\
&= 2\int_0^1 f(t)\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\langle f | e_k\rangle
\end{aligned}$$

• Puis

$$\begin{aligned}
a_{2k}(\tilde f) &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\tilde f(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \tilde f(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 f(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t - \int_1^2 f(2-t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 f(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(u)\cos(2k\pi-k\pi u)\,\mathrm{d}u\\
&= \int_0^1 f(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(u)\cos(k\pi u)\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

• Enfin, les $b_k(\tilde f)$ sont nuls puisque $\tilde f$ est paire.

I.B.3) On applique ici les résultats du cours sur les séries de Fourier. Mais la norme utilisée dans le cours est un peu différente de celle de l'énoncé. Plus précisément, la norme N utilisée dans le cours est telle que, pour tout fonction g 4-périodique continue par morceaux, on ait $\mathrm{N}(g)^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} g^2$.

Le théorème de Parseval, que l'on peut appliquer ici puisque $\tilde f$ est 4-périodique et continue par morceaux, donne (la fonction étant à valeurs réelles) :

$$\frac{a_0(\tilde f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(\tilde f)^2 + b_n(\tilde f)^2) = \mathrm{N}(\tilde f)^2$$

ce qui, compte tenu des résultats précédents, devient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle f | e_k \rangle^2 = \mathrm{N}(\tilde{f})^2 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \tilde{f}^2 = \int_0^1 f^2 = \|f\|_2^2$$

Les sommes partielles d'indice impair de la série de Fourier de $\tilde{f}$ s'écrivent :

$$\mathrm{S}_{2n+1}(\tilde{f}) = \frac{a_0(\tilde{f})}{2} + \sum_{p=1}^{2n+1}\left[a_p(\tilde{f})\cos\left(\frac{p\pi t}{2}\right) + b_p(\tilde{f})\sin\left(\frac{p\pi t}{2}\right)\right]$$

soit ici

$$\mathrm{S}_{2n+1}(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{2}\,\langle f | e_k \rangle \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \langle f | e_k \rangle\, e_k$$

Le théorème de Parseval donne la convergence en moyenne quadratique de cette série vers $\tilde{f}$, soit

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{N}(\tilde{f} - \mathrm{S}_{2n+1}(\tilde{f})) = 0$$

Or, si $g = \mathrm{S}_{2n+1}(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{n} \langle f | e_k \rangle\, e_k$, on a $\tilde{g} = g$, (car les e_k sont toutes paires et leur courbe est symétrique par rapport au point $(1,0)$), donc $[\mathrm{N}(\tilde{f}-g)]^2 = [\mathrm{N}(\widetilde{f-g})]^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2}(\widetilde{f-g})^2 = \int_0^1 (f-g)^2 = \|f-g\|_2^2$.

On aura donc bien $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \langle f | e_k \rangle\, e_k \right\|_2 = 0$.

I.B.4) Si $f(1) = 0$ alors $\tilde{f}$ est continue, et, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, $\tilde{f}$ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
Le théorème de convergence normale des séries de Fourier assure alors que la suite $\mathrm{S}_{2n+1}(\tilde{f})$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$, donc vers f sur $[0,1]$ c'est à dire :

$$\forall t \in [0,1]\ ,\ f(t) = \sum_{k=0}^{n} \langle f | e_k \rangle\, e_k(t)$$

I.B.5)
- On applique les résultats précédents à $f(t) = u(t) = \sqrt{3}(1-t)$. On obtient

$$\begin{aligned}
\langle f | e_k \rangle &= \sqrt{6}\int_0^1 (1-t)\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{6}\left\{\left[(1-t)\frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}\,\mathrm{d}t\right\} = \sqrt{6}\left[-\frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k^2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{6}}{\omega_k^2}
\end{aligned}$$

  La relation précédente pour $t = 0$ donne alors $\sqrt{3} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{6}}{\omega_k^2}\sqrt{2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}$.

- On applique les résultats précédents à $f(t) = \sin\omega(t-1)$ pour $\omega \in \Omega$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\langle f | e_k \rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \sin(\omega(t-1))\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 [\sin((\omega+\omega_k)t - \omega) + \sin((\omega-\omega_k)t - \omega)]\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\cos((\omega+\omega_k)t-\omega)}{\omega+\omega_k} + \frac{\cos((\omega-\omega_k)t-\omega)}{\omega-\omega_k}\right]_0^1 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega\left[\frac{1}{\omega+\omega_k} + \frac{1}{\omega-\omega_k}\right] = \sqrt{2}\frac{\omega\cos\omega}{\omega^2-\omega_k^2}
\end{aligned}$$

  La relation de I.B.4 pour $t = 0$ donne alors $-\sin\omega = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\omega\cos\omega}{\omega^2-\omega_k^2}$, ce qui donne le résultat de l'énoncé en divisant par $\cos\omega \neq 0$.

I.B.6) Simple calcul en utilisant les résultats précédents :

$$\phi(\omega)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\omega}\tan\omega=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\omega_k^2}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\omega_k^2-\omega^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2-\omega_k^2)}.$$

I.C - -

I.C.1) Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. Sur l'intervalle $]\omega_k,\omega_{k+1}[$ la fonction est strictement décroissante, puisque chaque fonction $\omega\mapsto\dfrac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2-\omega_k^2)}=\dfrac{1}{\omega_k^2}+\dfrac{1}{\omega^2-\omega_k^2}$ l'est.

De plus, $\lim\limits_{\omega\to\omega_k^+}\phi_n(\omega)=+\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to\omega_{k+1}^-}\phi_n(\omega)=-\infty$, donc ϕ_n possède bien une et une seule racine dans $]\omega_k,\omega_{k+1}[$.

I.C.2) Pour $\omega\in]\omega_0,\omega_1[$, $\phi_{n+1}(\omega)=\phi_n(\omega)+\dfrac{\omega^2}{\omega_{n+1}^2(\omega^2-\omega_{n+1}^2)}$. Puisque $\omega<\omega_{n+1}$, on a $\phi_{n+1}(\omega)<\phi_n(\omega)$.

En particulier, $\phi_{n+1}(\mu_n)<0$ ce qui implique, compte tenu des variations de ϕ_{n+1}, que $\mu_{n+1}<\mu_n$.

La suite (μ_n) est donc décroissante et minorée dans l'intervalle $]\omega_0,\omega_1[$; elle converge vers un réel $\mu\in[\omega_0,\omega_1[$.

I.C.3) Par définition, pour tout $\omega\in\Omega$, $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(\omega)=\phi(\omega)$, puisque $\phi_n(\omega)$ est la somme partielle d'indice n de la série qui définit $\phi(\omega)$

De plus, $\left|\phi(\omega)-\phi_n(\omega)\right|=\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2-\omega_k^2)}\right|=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega_k^2-\omega^2}-\frac{1}{\omega_k^2}\right)\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega_k^2-\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_k^2}\right)$ pour $n\geqslant 1$ et $\omega\in]\omega_0,\omega_1[$.

Donc $\left\|\phi-\phi_n\right\|_\infty\leqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega_k^2-\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_k^2}\right)$, qui tend vers 0 quand $n\to\infty$, comme reste d'une série numérique convergente. Cela montre que la suite (ϕ_n) converge uniformément vers ϕ sur $]\omega_0,\omega_1[$.

On a donc, d'après un théorème du cours : $\phi(\mu)=\lim\limits_{n\to+\infty}\phi_n(\mu_n)=0$. μ est donc racine de ϕ dans $]\omega_0,\omega_1[=]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$. C'est aussi par définition de ϕ l'unique solution de l'équation $\omega=\tan\omega$ sur cet intervalle (l'unicité venant de la stricte monotonie de la fonction $\omega\mapsto\omega-\tan\omega$).

Partie II - Estimation de la vitesse en moyenne quadratique

II.A - -

II.A.1) Puisque z est continue sur $[0,1]$, y est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall t\in[0,1]\ ,\ y'(t)=-\int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s+(1-t)z(t)-(1-t)z(t)=-\int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s$$

d'où y est de classe $\mathscr{C}^2$ et $y''=-z$.

Les deux autres relations sont immédiates.

II.A.2) La linéarité de T ne pose pas de problèmes.

En notant $y_1=\mathrm{T}(z_1)$ et $y_2=\mathrm{T}(z_2)$, on a

$$\left\langle \mathrm{T}(z_1)\middle|z_2\right\rangle=\left\langle y_1\middle|-y_2''\right\rangle=-\int_0^1 y_1(t)y_2''(t)=-\left[y_1(t)y_2'(t)\right]_0^1+\int_0^1 y_1'(t)y_2'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 y_1'(t)y_2'(t)\,\mathrm{d}t$$

puisque $y_1(1)=y_2'(0)=0$.

L'expression obtenue étant symétrique en y_1' et y_2', on a bien $\left\langle \mathrm{T}(z_1)\middle|z_2\right\rangle=\left\langle z_1\middle|\mathrm{T}(z_2)\right\rangle$, autrement dit, T est auto-adjoint.

II.A.3) On calcule :

si $y=\mathrm{T}(e_k)$, $y'(t)=-\displaystyle\int_0^t e_k(s)\,\mathrm{d}s=-\sqrt{2}\int_0^t\cos(\omega_k s)\,\mathrm{d}s=-\sqrt{2}\frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}$, et, puisque $y(1)=0=\cos\omega_k$, on trouve $y(t)=\sqrt{2}\dfrac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k^2}$, soit finalement $\mathrm{T}(e_k)=\dfrac{1}{\omega_k^2}e_k$.

e_k est donc bien un vecteur propre de T pour la valeur propre $\dfrac{1}{\omega_k^2}$.

On a donc, en vertu de I.B.3, pour tout $z \in \mathscr{C}$:

$$\|T(z)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle T(z)\middle|e_k\right\rangle^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle T(e_k)\middle|z\right\rangle^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\omega_k^4} \left\langle e_k\middle|z\right\rangle^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle e_k\middle|z\right\rangle^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \|z\|_2^2$$

puisque $w_k \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On a donc bien $\|T(z)\|_2 \leqslant \dfrac{4}{\pi^2} \|z\|_2$.

De plus, puisque ω_k est strictement plus grand que $\dfrac{\pi}{2}$ dès que $k \geqslant 1$, il y aura égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $\left\langle e_k\middle|z\right\rangle = 0$ pour $k \geqslant 1$. C'est le cas par exemple pour $z = e_0$.

II.B - .

II.B.1) On notera pour la suite $V_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. Il s'agit de montrer que $\mathrm{Vect}(u)^\perp \cap V_n = \mathrm{Vect}(u_n)^\perp \cap V_n$ ce qui revient à dire qu'un vecteur v appartenant à V_n est orthogonal à u si et seulement si il est orthogonal à u_n. C'est bien le cas, puisque $\left\langle v\middle|u - u_n\right\rangle = 0$, car $u - u_n \in V_n^\perp$, donc $\langle v|u\rangle = 0 \iff \left\langle v\middle|u_n\right\rangle = 0$.

La famille $(e_0, \dots, e_n)$ étant une base orthonormale de V_n, une formule vue en cours donne directement $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\langle e_k\middle|u\right\rangle e_k$.

Puisque $\mathscr{H}_n = \mathrm{Vect}(u_n)^\perp \cap V_n$, $\mathscr{H}_n$ est l'orthogonal d'une droite dans V_n, c'est donc un hyperplan de V_n, et $\dim \mathscr{H}_n = n + 1 - 1 = n$.

II.B.2)
- Les e_k étant des vecteurs propres de T, le sous-espace vectoriel V_n est stable par T. Donc $T(\mathscr{H}_n) \subset V_n$. D'autre part, par définition, l'image de Π_{u_n} est incluse dans $\mathscr{H}_n$. On aura donc bien $\Pi_{u_n} \circ T(\mathscr{H}_n) \subset \mathscr{H}_n$.
- Pour $z_1, z_2 \in \mathscr{H}_n$, $T(z_1) - T_n(z_1) = T(z_1) - \Pi_{u_n}(T(z_1))$ appartient à $\mathrm{Vect}(u_n)$ par définition de Π_{u_n}, donc est orthogonal à z_2 : $\left\langle T(z_1) - T_n(z_1)\middle|z_2\right\rangle = 0$. Donc $\left\langle T_n(z_1\middle|z_2\right\rangle = \left\langle T(z_1)\middle|z_2\right\rangle$.
En échangeant les rôles de z_1 et z_2, on a de même $\left\langle T_n(z_2)\middle|z_1\right\rangle = \left\langle T(z_2)\middle|z_1\right\rangle$. Le résultat demandé découle donc directement de II.A.2.
- T_n est donc un endomorphisme auto-adjoint de $\mathscr{H}_n$, espace vectoriel de dimension finie, il est donc diagonalisable.

II.B.3)
- On sait que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\langle e_k\middle|u\right\rangle e_k$ et on a calculé en I.B.5 $\left\langle e_k\middle|u\right\rangle = \dfrac{\sqrt{6}}{\omega_k^2}$. Dans la base $(e_0, \dots, e_n)$, le vecteur u_n s'écrit donc $u_n = \sqrt{6}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\omega_k^2} e_k$.

  Si $z \in V_n$ a pour coordonnées $(z_0, \dots, z_n)$ dans la base $(e_0, \dots, e_n)$, on a $z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k e_k$ d'où $T(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k T(e_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{\omega_k^2} e_k$, de sorte que l'équation $T(z) - \dfrac{z}{\omega^2} = \dfrac{u_n}{\sqrt{6}}$ équivaut à

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \text{ , } z_k \left(\frac{1}{\omega_k^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega_k^2}$$

  L'unique solution est donc $z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_k^2} e_k$.
- $z \in \mathscr{H}_n$ si et seulement si $\left\langle z\middle|u_n\right\rangle = 0$, ce qui donne (expression du produit scalaire dans une base orthonormale) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)} = 0$, soit encore $\varphi_n(\omega) = 0$.
- Ainsi, pour chacune des n racines de l'équation $\varphi_n(\omega) = 0$, on a trouvé un vecteur z tel que $z \perp u_n$ et $T(z) - \dfrac{z}{\omega^2} = \dfrac{u_n}{\sqrt{6}}$, d'où $\Pi_{u_n} \circ T(z) - \dfrac{1}{\omega^2}\Pi_{u_n}(z) = 0$ soit $T_n(z) = \dfrac{1}{\omega^2}\Pi_{u_n}(z) = \dfrac{1}{\omega^2} z$.

Ce vecteur z étant non nul (puisque $z=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_k^2}e_k$), il s'agit d'un vecteur propre de T_n pour la valeur propre $\frac{1}{\omega^2}$. L'équation $\phi_n(\omega)=0$ ayant n racines, cela nous fait n valeurs propres de T_n, endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, on les a donc toutes.

II.B.4) Notons $(e'_1,\dots,e'_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de T_n, et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ les valeurs propres de T_n.

Soit $z=\sum_{k=1}^{n}z_k e'_k$ un vecteur de $\mathscr{H}_n$. Alors $T_n(z)=\sum_{k=1}^{n}z_k\lambda_k e'_k$ et

$\langle z|T_n(z)\rangle=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k^2 \leqslant \left(\max_{k\in[1,n]}\right)\lambda_k\sum_{k=1}^{n}z_k^2=\left(\max_{k\in[1,n]}\lambda_k\right)\langle z|z\rangle$

Or les λ_k sont les réels de la forme $\frac{1}{\omega^2}$ où ω est racine de l'équation $\phi_n(\omega)=0$, et on a noté μ_n la plus petite de ces racines (I.C.1). Donc la plus grande des valeurs propres de T_n est $\frac{1}{\mu_n^2}$.

Enfin, si $z\in\mathscr{H}_n$, on a déjà vu que $\langle T(z)|z\rangle=\langle T_n(z)|z\rangle$, donc finalement $\langle T(z)|z\rangle\leqslant\frac{1}{\mu_n^2}\langle z|z\rangle$.

II.C - -

II.C.1)
- $z_n\in\mathscr{H}_n$ est immédiat par définition.
- Notons p_n la projection orthogonale sur V_n, de sorte que $p_n(u)=u_n$ et $p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\langle e_k|z\rangle e_k$.

  On a vu en I.B.3 que $\lim_{n\to\infty}\|z-p_n(z)\|_2=0$, c'est-à-dire que $(p_n(z))$ tend vers z au sens de la norme $\|\ \|_2$. De même, (u_n) tend vers u au sens de cette norme.
  D'autre part, $z_n=\Pi_{u_n}(p_n(z))$ et, d'après le résultat de la première question préliminaire, $p_n(z)-\Pi_{u_n}(p_n(z))=\frac{\langle p_n(z)|u_n\rangle}{\|u_n\|_2^2}u_n$ d'où $\|z_n-p_n(z)\|_2=\frac{|\langle p_n(z)|u_n\rangle|}{\|u_n\|_2}$. Par continuité du produit scalaire et de la norme, on a $\lim_{n\to\infty}\|z_n-p_n(z)\|_2=\frac{|\langle z|u\rangle|}{\|u\|_2}=0$ puisque $z\in\mathscr{H}$.
  Finalement, l'inégalité triangulaire $\|z_n-z\|_2\leqslant\|z_n-p_n(z)\|_2+\|p_n(z)-z\|_2$ implique que $\lim_{n\to\infty}\|z_n-z\|_2=0$.
- Enfin, d'après II.A.3, $\|T(z)-T(z_n)\|_2=\|T(z-z_n)\|_2\leqslant\frac{4}{\pi^2}\|z-z_n\|_2$, d'où $\|T(z)-T(z_n)\|_2$ tend aussi vers 0 quand $n\to\infty$.
- On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\langle z_n|T(z_n\rangle\leqslant\frac{1}{\mu_n^2}\langle z_n|z_n\rangle$. Pour obtenir l'inégalité demandée, il suffit de passer à la limite quand $n\to\infty$, ce qui est possible car l'application $(x,y)\mapsto\langle x|y\rangle$ est continue (cela découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la caractérisation d'une application bilinéaire continue, voir chapitre du cours sur les espaces vectoriels normés).

II.C.2) Soit C_2 tel que, pour tout $z\in\mathscr{H}$, $\langle z|T(z)\rangle\leqslant C_2\langle z|z\rangle$.
En considérant, pour tout entier n, un vecteur propre $z_n\in\mathscr{H}_n$ de T_n associé à la valeur propre $\frac{1}{\mu_n^2}$, on aura, puisque $\langle z_n|T(z_n)\rangle=\langle z_n|T_n(z_n)\rangle=\frac{1}{\mu_n^2}\langle z_n|z_n\rangle$, $C_2\geqslant\frac{1}{\mu_n^2}$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien $C_2\geqslant\frac{1}{\mu^2}$.

II.D - Soit $\xi\in\mathscr{A}$, et $z=-\xi''$. $z\in\mathscr{H}$ d'après la question préliminaire.
Puisque $\xi(1)=\xi'(0)=0$, on a $\xi=T(z)$ d'après II.A.1. Le calcul fait en II.A.2 donne alors :

$\langle\xi'|\xi'\rangle=\int_0^1\xi'^2(t)\,dt=\langle z|T(z)\rangle=\langle\xi''|T(\xi'')\rangle$.

D'après le résultat précédent, $\langle\xi'|\xi'\rangle\leqslant\frac{1}{\mu^2}\langle z|z\rangle=\langle\xi''|\xi''\rangle$ et on peut conclure : $\|\xi'\|_2\leqslant\frac{1}{\mu}\|\xi''\|_2$.