DM N°2 (pour le 30/09/2010)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et Q le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne naturelle), c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels positifs au sens large.

On appelle S l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence $(\mathscr{R})$ suivante :

$$\text{pour tout } n\geqslant 1,\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n^2 + U_{n-1}^2\right)$$

et telles, de plus, que l'on ait : $U_0\geqslant 0$ et $U_1\geqslant 0$.

On associe à tout élément (x, y) de Q la suite $U(x, y)$ appartenant à S définie par $U_0 = x$ et $U_1 = y$.

Le terme de rang n de $U(x, y)$ sera noté $U_n(x, y)$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, par U_n.

Enfin, λ désignant un élément de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, E_λ désignera l'ensemble des éléments (x, y) de Q tels que la suite $U(x, y)$ ait pour limite λ.

La partie IV ne dépend que de la partie I.

Première partie : Généralités

I.1 a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.

b) Quelles sont les limites possibles finies ou infinies d'une suite appartenant à S ?

c) Montrer que, si une suite appartenant à S a trois termes consécutifs égaux, c'est une suite constante.

d) Montrer que, si une suite appartenant à S a deux termes consécutifs égaux à 1, c'est une suite constante.

e) Que peut-on dire d'une suite appartenant à S dont un terme autre que les deux premiers est nul ?

I.2. Soit une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ appartenant à S et *non constante*.

a) Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et de $U_n - U_{n-2}$ pour $n\geqslant 2$.

b) Montrer que, s'il existe $N\geqslant 1$ tel que U_{N+1} soit supérieur ou égal à U_{N-1} et à U_N, la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

On établirait de même que, s'il existe $N\geqslant 1$ tel que U_{N+1} soit inférieur ou égal à U_{N-1} et à U_N, la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang. La démonstration correspondante n'est pas demandée.

c) Déterminer les limites des suites $U(x, y)$ pour $x = \sqrt{2}$, $y = 0$ et pour $x = 2$, $y = 0$.

I.3. Soit une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ non constante, appartenant à S ; on suppose de plus que, quel que soit N, la suite $(U_n)_{n\geqslant N}$ n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante.

On ne cherchera pas, dans cette question à démontrer l'existence de telles suites.

Montrer que les deux suites $(U_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(U_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont strictement monotones et de sens contraire. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1. On pourra montrer que U_0 et U_1 sont distincts et envisager les deux cas $U_0 < U_1$ et $U_0 > U_1$.

I.4 Établir, pour une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ *non constante* appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) II existe un entier $N\geqslant 0$ tel que $U_N\geqslant 1$ et $U_{N+1}\geqslant 1$.

b) La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

c) La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

On pourra, pour cela, établir que, si une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la propriété a), tous ses termes sont, à partir d'un certain rang, strictement supérieurs à 1.

I.5. Établir de même, pour une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ de S *non constante*, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) Il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que U_N et U_{N+1} soient inférieurs au sens large à 1.

b) La suite $(U_n)_{n \geqslant 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.

c) La suite $(U_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers zéro.

I.6 Montrer que E_0, E_1, $E_{+\infty}$ sont non vides. Quelle est leur réunion ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on montre que E_1 *a moins deux éléments.*

Pour $(x, y) \in Q$, on désigne par $\lambda(x, y)$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $U(x, y)$.

II.1. Comparer $\lambda(x, y)$ et $\lambda(x', y')$ dans l'hypothèse où (x, y) et (x', y') vérifient : $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.

II.2. On considère deux couples (x, y) et (x', y') éléments de Q. On suppose de plus que $U(x, y)$ converge vers 1.

a) Soit $\varepsilon > 0$ un réel donné. Montrer que, si l'on a pour un entier N :

$$U_{N-1}(x, y) + \varepsilon \leqslant U_{N-1}(x', y') \text{ et } U_N(x, y) + \varepsilon \leqslant U_N(x' y')$$

alors, pour tout $n \geqslant N$, on a : $U_n(x, y) + \varepsilon \leqslant U_n(x', y')$.

b) Donner la valeur de $\lambda(x', y')$ dans les deux cas suivants :

- $x \leqslant x'$, $y \leqslant y'$ et $(x, y) \neq (x', y')$.
- $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$ et $(x, y) \neq (x', y')$.

II.3. a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ borne supérieure de l'ensemble des $x \geqslant 0$ tels que $\lambda(x, 0)$ soit nul.

b) Que dire de $\lambda(x, 0)$ pour $0 \leqslant x < a$?

c) Déterminer la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de a.
On donnera pour cela un programme en MAPLE.

II.4. a) Montrer que, pour tout n, la fonction $x \mapsto U_n(x, 0)$ est continue.

b) Montrer que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers zéro, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a + \varepsilon, 0)$ tende vers zéro ; on pourra utiliser pour cela la question (I.5).

c) Montrer de même que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers $+\infty$, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a - \varepsilon, 0)$ tende vers $+\infty$.

d) En déduire $\lambda(a, 0)$. Que vaut $\lambda(x, 0)$ pour $x > a$?

e) Montrer que, pour $y > 0$, la suite $\big(U_n(a, y)\big)_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Troisième partie

Étude de E_0, E_1, $E_{+\infty}$ (*Ces notations sont définies dans le préambule*)

III.1. Soit x compris au sens large entre 0 et a. Établir l'existence d'un point unique de E_1 ayant l'abscisse x. On note désormais $\varphi(x)$ l'ordonnée de ce point et Γ la courbe décrite par le point $(x, \varphi(x))$ quand x varie de 0 à a.

Déterminer à l'aide de Γ les ensembles E_0, E_1, $E_{+\infty}$.

III.2. a) Montrer que φ décroît. Déterminer $\varphi(1)$ et $\varphi(a)$.

b) À l'aide de la relation $U_n(x, y) = U_{n-1}\left(y, \dfrac{x^2 + y^2}{2}\right)$, établir, pour $x \in [0, a]$, la relation $x^2 + \varphi^2(x) = 2\varphi\left[\varphi(x)\right]$.

c) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi\left(\dfrac{a^2}{2}\right)$.

III.3. a) Soit y compris au sens large entre 0 et $\varphi(0)$. Montrer qu'il existe un point unique de E_1 d'ordonnée y. On notera $\psi(y)$ l'abscisse de ce point.

b) Montrer que φ est strictement décroissante.

c) (☕)Montrer que φ est continue.

III.4. a) Étudier les variations de $x^2+\varphi^2(x)$ pour $x \in [0,a]$. En déduire que Γ est située dans une couronne circulaire que l'on précisera.

Montrer que φ est dérivable en 0 et déterminer $\varphi'(0)$.

b) Établir, pour $x \in [0,a]$, l'inégalité $\varphi(x) \geqslant \sqrt{ax-x^2}$.

On pourra comparer les suites $U(a,0)$ et $U\left(x, \sqrt{ax-x^2}\right)$.

Qu'en résulte-t-il pour le comportement de φ au voisinage de a ?

c) En admettant que φ est dérivable pour $x=1$, calculer $\varphi'(1)$.

d) Tracer la représentation graphique de φ.

Quatrième Partie

Étude la rapidité de croissance des suites croissantes de S.

IV.1. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite quelconque appartenant à S.

Démontrer, pour tout $n\geqslant 0$, les inégalités $\dfrac{1}{2}U_n^2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n + \dfrac{1}{2}U_n^2$.

IV.2. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à S et tendant vers $+\infty$.

On pose $V_n = \dfrac{U_n}{2}$ et $z_n = 2^{-n}\ln[V_n]$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

a) Établir que la suite (z_n) tend vers une limite L (on se servira de la série de terme général $z_{n+1}-z_n$). Cette limite dépend de U_0 et U_1 : on ne cherchera pas à l'évaluer.

b) Les hypothèses restant les mêmes, établir la double inégalité :

$$L - \frac{1}{2^n V_n} < z_n < L \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

En déduire un équivalent de U_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on posera $e^L = M$).

Que peut-on dire de la différence entre U_n et cet équivalent ?

IV.3 On prend $U_0 = 2$, $U_1 = 2$. Déduire de ce qui précède une valeur approchée de L à 10^{-6} près. Quel est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de U_{20} ?

IV.4. On considère ici une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ appartenant à S, non constante et tendant vers zéro. établir qu'à partir d'un certain rang, on a :

$$U_{n+1} \leqslant U_{n-1}^2.$$

En déduire l'existence de deux constantes A et B ($A>0$ et $B>1$) telles que, pour tout n, on ait $U_n \leqslant A.B^{-2^{n/2}}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆