CENTRALE MP 1996 Maths1

On note $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des applications lipschitziennes, c'est-à-dire des applications ϕ pour lesquelles existe une constante K_ϕ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant K_\phi\,|x-y|$$

On a pour but, dans ce problème, de rechercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x+a) = f(x),$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés.

Les parties III et IV sont largement indépendantes.

Partie I - Question préliminaire

Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant (1). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(2) \qquad F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka)$$

$$(3) \qquad F(x) = \lambda^{-n} F(x-na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka).$$

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1. Prouver que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

II.2. Soit $f \in \mathcal{F}$ dérivable. Montrer que, pour que f appartienne à $\mathcal{L}$, il faut et il suffit que sa dérivée soit bornée.

II.3. f et g étant deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$, montrer que leur produit $f \cdot g$ est aussi élément de $\mathcal{L}$.
En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

II.4. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant A\,|x| + B\,.$$

II.5. Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leqslant x-y \leqslant 1$, on a $|f(x)-f(y)| \leqslant M\,|x-y|$. Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A. On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

III.A.1.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \lambda^n f(x+na)$ est absolument convergente (on pourra utiliser la Question II.4).

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na).$$

III.A.2. Étude de 3 cas particuliers.

a) On suppose que f est la fonction constante f_1 définie par $f_1(x) = 1$.
Montrer que $f_1 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_1 correspondante.

b) On suppose que f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$.
Montrer que $f_2 \in \mathcal{L}$ et que la fonction F_2 correspondante est donnée par

$$(5) \qquad F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x-a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}.$$

c) On suppose que f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$.
Montrer que $f_3 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_3 correspondante.

III.B. On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$.

III.B.1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \lambda^{-n} f(x - na)$ est absolument convergente.

III.B.2. En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na).$$

III.B.3. Dans chacun des trois cas particuliers suivants, déterminer la fonction F_i correspondante :

a) f est la fonction constante f_1 définie par $f_1(x) = 1$.

b) f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$.

c) f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$.

Partie IV - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

IV.A. - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$.

IV.A.1. Montrer que, pour qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1), il faut que f soit bornée.

IV.A.2.

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - F(x+a) = 0.$$

b) Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). F est-elle unique ?

IV.A.3. On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée par (5), on obtient une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) Si $\cos a = 1$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B. - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$.

IV.B.1.

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(x+a) = 0.$$

b) Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). F est-elle unique ?

IV.B.2. On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) Si $\cos a \neq -1$, expliciter une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) Si $\cos a = -1$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.3. On suppose dans cette question que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et à dérivée f' croissante.

a) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n f(x+n)$ converge.

b) Montrer qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ (pour établir que $F \in \mathcal{L}$, on pourra utiliser la question II.5).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆