DM N°4 (pour le 08/11/2013)

PROBLÈME I : Approximation uniforme par les polynômes de Bernstein.

Dans tout le problème n est un entier strictement positif fixé et x un réel appartenant à $[0,1]$.
On désigne par $P_{n,k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, la fonction polynôme de degré n définie sur $[0,1]$ par

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but du problème est d'étudier ces fonctions polynômes connues sous le nom de polynômes de Bernstein, et plus particulièrement leur lien avec l'approximation des fonctions continues.

A : ***Quelques calculs préliminaires.***

Dans cette partie, x est un nombre réel et n est un entier naturel.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) = 1$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, P_{n,k}(x) = n\, x$.

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\, P_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$.

4) Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

B : ***Étude de*** $S(x)$**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. Le but de cette partie est de majorer la somme :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| P_{n,k}(x).$$

1) *Majoration de* $S(x)$ *: première méthode.*

On note :

- V l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots n\}$ tels que $\left| x - \dfrac{k}{n} \right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,
- W l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots n\}$ tels que $\left| x - \dfrac{k}{n} \right| > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

et on pose :

$$S_V(x) = \sum_{k \in V} \left| x - \frac{k}{n} \right| P_{n,k}(x) \quad \text{et} \quad S_W(x) = \sum_{k \in W} \left| x - \frac{k}{n} \right| P_{n,k}(x).$$

a) Montrer que $S_V(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Montrer que $S_W(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{5}{4\sqrt{n}}$.

2) *Majoration de $S(x)$: seconde méthode.*

a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique.

b) A l'aide de la question A.4, en déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

C : *Application à l'approximation uniforme.*

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme de la convergence uniforme, notée $\| \ \|_\infty$:

$$\forall f \in \mathcal{C},\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(x)| \,.$$

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ème polynôme de Bernstein de f, noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x \in [0,1]$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x)\,.$$

Le but de cette partie est d'étudier $\|B_n(f) - f\|_\infty$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

1) *Un exemple.*

Si $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0,1]$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f) - f\|_\infty$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer, pour tout $x \in [0,1]$, la relation :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P_{n,k}(x)\,.$$

3) a) Montrer que si f est δ-lipschitzienne, alors $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) En déduire que si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors il existe un nombre réel c tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

c) Étendre le résultat précédent au cas où f est une fonction continue, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

4) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, et $M_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$.

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{M_2(f)}{8n}$$

et vérifier, à l'aide d'un exemple, que cette majoration est la meilleure possible.

D : *Amélioration de la vitesse de convergence.*

Le but de cette partie est d'étudier la vitesse de convergence de la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque l'on suppose f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$.

1. On note T_p ($p \in \mathbb{N}^*$) la fonction polynôme définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ par $T_p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^p P_{n,k}(x)$.

a) Montrer que $T_2(x) \leqslant \dfrac{n}{4}$.

b) Montrer que pour $p \geqslant 2$, $x(1-x)T_p'(x) = pnx(1-x)T_{p-1}(x) - T_{p+1}(x)$.

c) Montrer que $T_p(x)$ est un polynôme en n et un polynôme en x.
Montrer que les fonctions T_p, $3 \leqslant p \leqslant 6$ sont des polynômes en n de degré respectivement 1 (pour $p=3$), 2 ($p=4$), inférieur ou égal à 2 ($p=5$) et 3 ($p=6$).
En déduire qu'il existe une constante C telle que $|T_6(x)| \leqslant Cn^3$.

d) On note $\Gamma(n,x)$ l'ensemble des entiers k, $0 \leqslant k \leqslant n$, tels que $|n^{-3/4}(k-nx)| \geqslant 1$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in\Gamma(n,x)} P_{n,k}(x) \leqslant n^{-sfrac92}T_6(x)$.mk

2. Dans cette question, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$.
On désire montrer que pour tout x_0 fixé dans $[0,1]$,

$$B_n(f)(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{2n}x_0(1-x_0)f''(x_0) + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \qquad (*)$$

où $o(x)$ est une fonction telle que $o(x)/x$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.

a) Montrer que $(*)$ est vérifiée pour $f(x) = \mathrm{e}^x$.

b) Montrer que, pour tout x_0 fixé dans $[0,1]$

$$B_n(f)(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{2n}x_0(1-x_0)f''(x_0) + \sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{k}{n} - x_0\Big)^2 \varepsilon\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x_0)$$

où ε est une fonction bornée telle que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

c) En utilisant notations et résultats de **D.1**, montrer qu'il existe une constante D telle que

$$\left|\sum_{k\in\Gamma(n,x_0)}\Big(\frac{k}{n} - x_0\Big)^2 \varepsilon\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x_0)\right| \leq \frac{AD}{n^{3/2}},$$

où $A = \sup\{|\varepsilon(x)|(x-x_0)^2\ ;\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

d) On note $\alpha(n)$ la borne supérieure de $|\varepsilon(x)|$ sur $[x_0 - n^{-1/4}, x_0 + n^{-1/4}]$.
Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{k\notin\Gamma(n,x_0)}\Big(\frac{k}{n} - x_0\Big)^2 \varepsilon\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x_0)\right| \leq \frac{\alpha(n)}{n^2}T_2(x_0)$.

e) En déduire que $(*)$ est vérifiée, puis qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ telle que $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{M}{n}$.