CORRIGÉ DU DM N°4

PROBLÈME I : Approximation uniforme par les polynômes de Bernstein.

(extrait de Centrale PC 2012)

Partie A :

1) La formule du binôme donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$.

2) Pour $k \geqslant 1$, $k\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$ (l'énoncé suppose $n \geqslant 1$).

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad \text{(le terme pour } k=0 \text{ est nul!)}\\ &= nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = nx(x+1-x)^{n-1} = nx\,.\end{aligned}$$

3) Pour $k \geqslant 2$ <u>et $n \geqslant 2$</u>, $k(k-1)\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad \text{(les termes pour } k=0,1 \text{ sont nuls!)}\\ &= n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2} = n(n-1)x^2\,,\end{aligned}$$

et on vérifie directement que la formule reste valable dans le cas $n = 2$.

4) $\displaystyle\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2x\frac{k}{n} + \frac{k^2-k}{n^2} + \frac{k}{n^2}$ donne avec 1), 2) et 3) :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k}(x) = x^2 - 2x^2 + \frac{n(n-1)x^2}{n^2} + \frac{x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}\,.$$

Partie B :

1) a) $\displaystyle S_V(x) = \sum_{k\in V}\left|x-\frac{k}{n}\right| P_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in V}P_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Pour $k \in W$ on a : $\sqrt{n}\left|x-\dfrac{k}{n}\right| > 1$ donc $\sqrt{n}\left|x-\dfrac{k}{n}\right| < n\left(x-\dfrac{k}{n}\right)^2$.

Par suite, $\displaystyle\sqrt{n}S_W(x) = \sum_{k\in W}\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right| P_{n,k}(x) < n\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k}(x)$ par A.4

D'où $S_W(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c) $f(x) = x(1-x)$ a un maximum égal à $\dfrac{1}{4}$ (obtenu pour $x = \dfrac{1}{2}$).

Donc $S_W(x) \leqslant \dfrac{1}{4\sqrt{n}}$ et $S(x) = S_V(x) + S_W(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{4\sqrt{n}} = \dfrac{5}{4\sqrt{n}}$.

2) a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canoniques'écrit :

$$\forall (a_k),\ (b_k) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ,\ \left|\sum_{k=0}^{n} a_kb_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2}\,.$$

b) Pour $a_k = \left|x - \dfrac{k}{n}\right| \sqrt{P_{n,k}(x)}$ et $b_k = \sqrt{P_{n,k}(x)}$ on obtient :

$$S(x) \leqslant \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \qquad \text{(en utilisant A.1 et A.4).}$$

De $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ on déduit ensuite : $S(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Partie C :

1) Pour $f(x) = x^2$ on calcule en écrivant $k^2 = k(k-1) + k$ et en utilisant les A.2 et A.3 :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} P_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2}(n(n-1)x^2 + nx) = \frac{(n-1)x^2 + x}{n}.$$

Par suite, $B_n(f)(x) - x^2 = \dfrac{x(1-x)}{n}$ d'où $||B_n(f) - f||_\infty = \dfrac{1}{4n}$ puisque $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, le maximum étant atteint pour $x = \dfrac{1}{2}$.

2) Immédiat avec le A.1.

3) a) Si f est δ-lipschitzienne, $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \delta \left|\dfrac{k}{n} - x\right|$ d'où $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \delta S(x) \leqslant \delta \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ avec le I.B.2.
Cela étant vrai pour tout $x \in [0,1]$ donc $||B_n(f) - f||_\infty \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$.

b) Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, elle est δ-lipschitzienne sur $[0,1]$ par l'inégalité des accroissements finis (avec $\delta = ||f'||_\infty$). On peut donc lui appliquer le a) et $c = \dfrac{\delta}{2}$.

c) L'inégalité des accroissements finis s'applique plus généralement à une fonction continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur un segment : f est donc δ-lipschitzienne sur $[0,1]$ avec $\delta = ||f'||_\infty$ et le résultat du b) est encore valable.

4) L'inégalité de Taylor-Lagrange implique, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 M_2(f) \quad (*)$$

D'autre part, en utilisant A.1 et A.2

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) P_{n,k}(x) \;=\; 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x)\right) P_{n,k}(x) = B_n(f)(x) - f(x)$$

puis en utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité $(*)$ et A.4 :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2} M_2(f) \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) = \frac{1}{2} M_2(f) \frac{x(1-x)}{n}$$

Compte tenu de $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \in [0,1]$, on en déduit

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{M_2(f)}{8n}$$

et cette majoration est la meilleure possible puisque l'on a vu en B.1 qu'il y avait égalité lorsque $f(x) = x^2$.