DS N°1 (le 07/09/2013)

Notations :

- Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
- Dans tout le problème, S désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $a_0 \in \mathbb{Z}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \in \mathbb{N}^*$.
- L'objectif du problème est la détermination d'approximations de nombres réels par des nombres rationnels. La méthode est exposée dans la partie **I**. La partie **II.** étudie cette approximation pour les réels $\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathbf{e}$. Le début de cette partie **II** (parties **A** et **B**), consacrée à l'étude d'une suite de fonctions rationnelles qui converge vers $\operatorname{th} x$, est indépendant de la partie **I.**.

  Pour cela on introduit une notation : étant donnée une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S, on définit la suite dont le terme général d'indice n est noté $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ par :

  $$[a_0] = a_0\ ,\ [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}\ ,\ \text{puis pour } n \geqslant 1,\ [a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right].$$

  En particulier $[a_0, a_1, a_2] = \left[a_0, a_1 + \dfrac{1}{a_2}\right] = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}}$ et plus généralement :

  $$[a_0, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

  Une telle expression s'appelle une *fraction continue.*

I. DÉVELOPPEMENT D'UN NOMBRE IRRATIONNEL EN FRACTION CONTINUE

A. Réduites d'une fraction continue.

Étant donnée une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S, on définit deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers par :

$$p_0 = a_0 \quad , \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad , \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

et

$$q_0 = 1 \quad , \quad q_1 = a_1 \quad , \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}\,.$$

Les nombres rationnels $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ s'appellent les *réduites* de la fraction continue $[a_0, \ldots, a_{\mathrm{N}}]$ pour $\mathrm{N} \geqslant n$.

I.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q_n \geqslant n$.

I.2. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}\,.$$

I.3. Calculer de même $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n$ pour $n \geqslant 2$.

I.4. Étude de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.4.a. Pour $n \geqslant 1$ calculer $r_n - r_{n-1}$ et pour $n \geqslant 2$ calculer $r_n - r_{n-2}$ en fonction des a_k et des q_k.

I.4.b. En déduire que les deux suites $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

I.4.c. En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera α sa limite.

I.4.d. On se propose de montrer par l'absurde que α est irrationnel.

En supposant que $\alpha = \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ et en utilisant l'encadrement $0 < \alpha - r_{2n} < r_{2n+1} - r_{2n}$ (que l'on justifiera), déterminer un entier k_n vérifiant $0 < k_n < \dfrac{d}{q_{2n+1}}$, puis conclure.

Pour la suite, on notera $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$; cette écriture s'appelle le *développement en fraction continue* de α.

On notera F l'application de S dans l'ensemble des nombres irrationnels définie par $\mathrm{F}(a) = \alpha = [a_0, a_1, \ldots]$.

B. Injectivité de F.

I.5.

I.5.a. Écrire $[a_0, a_1]$ et $[a_0, a_1, a_2]$ en fonction des p_i et q_i.

I.5.b. Démontrer au moyen d'une récurrence l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}\,.$$

Pour cela, on pourra utiliser la relation : $[a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right]$.

I.6.

I.6.a. Comparer r_0, r_1 et α. En déduire que a_0 est la partie entière de α.

I.6.b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, \ldots]$. Montrer l'égalité $\alpha = \alpha_0 = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$. Donner une relation entre α_k, α_{k+1} et a_k.

I.6.c. Décrire un algorithme qui permet de construire la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de α. En déduire que F est injective.

C. Surjectivité de F.

Étant donné un nombre réel x, on lui associe une suite $a_0, a_1, \ldots$ de la façon suivante :

- on commence par : $a_0 = \lfloor x \rfloor$, puis on pose $\alpha_0 = x$ et $y_0 = \alpha_0 - a_0$;
- si y_0 est nul, on arrête là ;
- sinon, on pose $\alpha_1 = \dfrac{1}{y_0}$, $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$ et $y_1 = \alpha_1 - a_1$; plus généralement, si $y_{n-1} \neq 0$, on pose $\alpha_n = \dfrac{1}{y_{n-1}}$, $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ et $y_n = \alpha_n - a_n$.

On obtient ainsi une suite, qui est finie si et seulement si il advient qu'un y_n est nul.

I.7. Dans cette question, on suppose x rationnel.

On suppose dans un premier temps que, pour tout entier naturel n, a_n est bien défini.

I.7.a. Montrer que, pour tout entier n, $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ et que, pour $n \geqslant 1$, $\alpha_n > 1$.

I.7.b. On définit par récurrence deux suites d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

- $x = \dfrac{u_0}{v_0}$ avec $u_0 \in \mathbb{Z}$ et $v_0 \in \mathbb{N}^*$;
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = v_n$ et v_{n+1} est égal au reste de la division euclidienne[1] de u_n par v_n lorsque v_n est non nul, et 0 sinon.

1. On rappelle le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: si a et b sont deux entiers de $\mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$, il existe un et un seul couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < |b|\,.$$

q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel n, $v_n > 0$ et $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}\cdot$

I.7.c. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
L'hypothèse du début de la question **I.7.** est-elle possible ?

I.8. Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que, pour tout entier naturel n, a_n soit bien défini.

I.9. On suppose désormais x irrationnel.

I.9.a. Vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite au début de la partie **C.** est bien élément de S.

On peut donc lui associer la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses réduites, et l'on reprend les résultats et les notations de la partie **A.**.

I.9.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $x = [a_0, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$.
On pourra procéder par récurrence en utilisant la propriété mentionnée en **I.5.b.**.

I.9.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ r_{2n} \leqslant x \leqslant r_{2n+1}$.

I.9.d. En déduire que l'application F est surjective (c'est-à-dire que tout nombre irrationnel admet un développement en fraction continue).

I.10. *Exemple :* On prend ici $x = \sqrt{3}$ (on admettra qu'il s'agit bien d'un nombre irrationnel).
Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et exprimer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en fonction de $\sqrt{3}$.
Déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. APPROXIMATION DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE PAR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES

On rappelle que pour tout réel x

$$\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\cdot$$

A. Étude d'une suite de fonctions.

II.1. Vérifier que l'on définit une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \operatorname{sh} x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x -2t f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

II.2. Expliciter les fonctions f_1 et f_2.

II.3. Montrer que la suite (f_n) vérifie la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2 f_{n-2}(x)\,.$$

On pourra par exemple caractériser f_n par l'expression de sa dérivée f_n' et la valeur $f_n(0)$.

II.4.

II.4.a. Montrer que, si P et Q sont deux polynômes tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Q}(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}(x)\operatorname{ch} x = 0$, alors les polynômes P et Q sont nuls.

On pourra étudier le comportement de $\mathrm{Q}(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}(x)\operatorname{ch} x$ quand x tend vers $+\infty$.

II.4.b. Montrer l'existence et l'unicité de deux suites de polynômes (P_n) et (Q_n) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \mathrm{Q}_n(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}_n(x)\operatorname{ch} x\,.$$

II.4.c. Déterminer P_0, Q_0, P_1, Q_1, et montrer que :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n(x) &= 2(2n-1)\mathrm{P}_{n-1}(x) + 4x^2\mathrm{P}_{n-2}(x)\\ \mathrm{Q}_n(x) &= 2(2n-1)\mathrm{Q}_{n-1}(x) + 4x^2\mathrm{Q}_{n-2}(x)\end{aligned}$$

II.4.d. Montrer que les coefficients des polynômes P_n et Q_n sont des entiers naturels, que les polynômes P_n sont impairs et que les polynômes Q_n sont pairs.

II.4.e. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Q}_n(x) \geqslant \mathrm{Q}_n(0)$ et que $\mathrm{Q}_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

B. Suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction th **.**

II.5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{n!}\,\mathrm{sh}\,x$.

II.6. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} - \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_n(x)}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{n!} \times \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} \times \frac{1}{\mathrm{Q}_n(x)} \quad \text{puis que} \quad \left|\mathrm{th}\,x - \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_n(x)}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

II.7. Montrer que, pour tout réel x, la suite $\left(\dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_n(x)}\right)_n$ converge vers $\mathrm{th}\,x$.

C. Développement en fraction continue de $\mathrm{th}(1/2)$ **et de** e **.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p'_n = \mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $q'_n = \mathrm{Q}_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On vient de démontrer que la suite $\left(\dfrac{p'_n}{q'_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\mathrm{th}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

II.8.

II.8.a. Vérifier que les suites $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont caractérisées par les relations :

$$p'_0 = 0 \quad , \quad p'_1 = 1 \quad , \quad q'_0 = 1 \quad , \quad q'_1 = 2$$

et

$$\forall n \geqslant 2,\ p'_n = 2(2n-1)p'_{n-1} + p'_{n-2} \quad , \quad q'_n = 2(2n-1)q'_{n-1} + q'_{n-2}.$$

II.8.b. En déduire que le développement en fraction continue de $\mathrm{th}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est ;

$$\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\right) = [0, 2, 6, 10, \ldots, 2(2n-1), \ldots].$$

II.9. On considère le développement en fraction continue $\alpha = [2, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots]$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ b_{3n+1} = b_{3n+3} = 1\ ,\quad b_{3n+2} = 2n+2$$

et on note ici $\dfrac{y_n}{z_n}$ ses réduites.

II.9.a. Montrer que, pour $n \geqslant 3$:

$$y_{3n-2} = 2(2n-1)y_{3n-5} + y_{3n-8} \quad \text{et} \quad z_{3n-2} = 2(2n-1)z_{3n-5} + z_{3n-8}.$$

II.9.b. Montrer que l'on a, pour $n \geqslant 1$: $y_{3n-2} = p'_n + q'_n$ et $z_{3n-2} = q'_n - p'_n$.

II.9.c. En déduire que le développement en fraction continue de e est

$$\mathrm{e} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots, b_n, \ldots].$$

Librement inspiré de : Centrale TSI 2010, ENS PC 2004, CCP PSI 2002 et Capes interne 1990

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆