DS N°4 (le 06/12/2014)

Problème 1 (extrait de CCP MP 2012)

Dans tout le problème, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in \mathrm{I}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. **a)** Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ sur I.

b) On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur I. Démontrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur I. Démontrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I *vers la fonction nulle.*

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$: $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0,1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0,1]$.

4. Si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ qui converge uniformément sur I ?
On attend une réponse détaillée, et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs, $\mathrm{I} = [0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathrm{I}$: $f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur I.

6. **a)** Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{I}} |f_n(x)|$.

b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. **a)** Calculer pour tout $x \in \mathrm{I}$: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$.

b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra observer que pour $k \geqslant n+1$, $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

a) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur I.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

c) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

PROBLÈME 2 (Épreuve pratique MINES-PONTS 1994)

L'objectif de ce problème est l'étude de la fonction ζ (dite *fonction zêta de Riemann*).

La première partie est consacrée à l'étude globale de cette fonction ζ ; la deuxième partie aux calculs de valeurs numériques de ζ au voisinage de 1 en faisant appel à une méthode d'accélération de convergence ; enfin, la troisième partie précise le comportement asymptotique de ζ au voisinage de 1.

Dans tout le problème, N et n désignent des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Première partie

Désignons par f_n, $\mathrm{S_N}$ et $\mathrm{R_N}$ les trois fonctions définies par les relations :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad ; \quad \mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^x} \quad ; \quad \mathrm{R_N}(x) = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,.$$

Les deux premières fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$; la fonction $\mathrm{R_N}$ est définie lorsque la série de terme général $f_n(x)$ est convergente.

1. a) Démontrer que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente dans l'intervalle $\mathrm{I} =]1,+\infty[$.

b) Prouver que les trois séries de fonctions de termes généraux respectifs f_n, f_n' et f_n'' sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[a,+\infty[$ contenu dans I.

c) Est-ce qu'il y a convergence uniforme pour ces trois séries de fonctions dans I ?

Par définition, ζ est la fonction somme de la série de fonctions de terme général f_n :

$$\forall x \in \mathrm{I}\,,\ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,.$$

2. a) Démontrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I et donner les expressions de ζ' et de ζ''.

b) Démontrer, pour tout réel x de l'intervalle I et pour tout entier $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement :

$$\frac{1}{(x-1)(\mathrm{N}+1)^{x-1}} \leqslant \mathrm{R_N}(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)\mathrm{N}^{x-1}}.$$

En déduire un encadrement de $\zeta(x)$ valable pour tout entier N.

c) Étudier les limites de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et lorsque x tend vers $+\infty$.

d) Donner un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1^+.

3. **a)** Utiliser l'encadrement obtenu en **2.b** pour écrire une fonction en Python `zeta(x,eps)` qui renvoie une valeur approchée de $\zeta(x)$ à eps près.

b) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction ζ.

c) Écrire un programme en Python qui réalise ce tracé sur l'intervalle $]1,10]$ en utilisant la fonction précédente.

Deuxième partie

Les résultats obtenus précédemment ne permettent pas un calcul précis et rapide de $\zeta(x)$ pour des valeurs de x voisines de 1. L'objectif de cette partie est de proposer, pour de telles valeurs, une méthode d'accélération de convergence.

Étant donnés un réel x et un entier n strictement supérieurs à 1, désignons par φ_n la fonction $u \mapsto \varphi_n(u)$ définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par la relation :

$$\varphi_n(u) = \int_{n-u}^{n+u} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\right) \mathrm{d}t.$$

1. **a)** Démontrer que la fonction φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; calculer $\varphi_n(0)$, $\varphi_n'(0)$ et $\varphi_n''(0)$.

b) Démontrer, pour tout entier $n > 1$ et pour tout réel x de I la relation :

$$f_n(x) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} + \varphi_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

c) Démontrer l'encadrement :

$$\frac{x(x+1)}{24} \frac{1}{(n+1)^{x+2}} \leqslant -\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{x(x+1)}{24} \frac{1}{[n-1)^{x+2}}.$$

(on pourra utiliser une formule de Taylor).

d) Soit x un réel et N un entier strictement supérieurs à 1 ; en utilisant les deux questions précédentes et la question **I.2.b**, démontrer la double inégalité :

$$\frac{x}{24(\mathrm{N}+2)^{x+1}} \leqslant \frac{1}{(x-1)\left(\mathrm{N}+\frac{1}{2}\right)^{x-1}} - \mathrm{R_N}(x) \leqslant \frac{x}{24(\mathrm{N}-1)^{x+1}}.$$

2. Utiliser l'encadrement précédent pour écrire une fonction en Python `zeta2(x,eps)` qui renvoie une valeur approchée de $\zeta(x)$ à eps près.

Comparer les temps d'exécution de cette fonction avec celle écrite en **I.3.a**.

Troisième partie

1. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$g_n(x) = \mathrm{S}_n(x) - \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x}\cdot$$

S_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $\mathrm{S}_n(x) = 1 + \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x} + \ldots + \dfrac{1}{n^x}\cdot$

a) Démontrer que cette suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$ (*on pourra considérer la série de terme général* $g_{n+1}(x) - g_n(x)$).

Soit g la fonction limite. Préciser la restriction de la fonction g à l'intervalle I (en fonction de ζ).

b) Démontrer, pour tout réel x strictement positif et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$-\frac{1}{n^x} \leqslant g(x) - g_n(x) \leqslant 0\,.$$

c) Établir que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Démontrer que l'expression $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite égale à $g(1)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆