DM N° 9 (pour le 08/01/2002)

PROBLÈME 1:

- Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés sont réels.
- Quelques définitions :
  - Soit E un espace vectoriel . Si $(a,b) \in E^2$, on appelle segment d'extrémités a et b, et on note $[a,b]$, l'ensemble des vecteurs $ta + (1-t)b$ lorsque t décrit $[0,1]$.
  - Une partie A de E est dite convexe si : $\forall(a,b) \in A^2$, $[a,b] \subset A$.
  - Soit A une partie convexe de E, a un élément de A. On dit que a est extrémal dans A si la partie $A - \{a\}$ est convexe. On note $\mathcal{E}(A)$ l'ensemble des éléments extrémaux de A.
  - Une application f d'une partie convexe A d'un espace vectoriel E, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dite convexe si :
  $$\forall(a,b) \in A^2 \text{ , } \forall t \in [0,1] \text{ , } f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$
  - Si (E,N) est un espace vectoriel normé, on notera $B_N = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$ la boule unité fermée de (E,N) et $S_N = \{x \in E, N(x) = 1\}$ la sphère unité de (E,N).

PARTIE I

1°) Soit E un espace vectoriel , A une partie convexe de E, a un élément de A.
Soit $\mathcal{P}_a$ l'énoncé : « $\forall(a_1,a_2) \in A^2,\ a = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2) \ \Rightarrow a_1 = a_2$ ».

(a) Montrer que : $a \in \mathcal{E}(A) \ \Rightarrow \mathcal{P}_a$.
(b) Montrer que : $a \notin \mathcal{E}(A) \ \Rightarrow \exists(a_1,a_2) \in A^2,\ a_1 \neq a_2$, et $\exists t \in]0,1[$ tq $a = ta_1 + (1-t)a_2$.
(c) En déduire : $a \in \mathcal{E}(A) \ \Leftrightarrow \ \mathcal{P}_a$.

2°) Soit (E,N) un espace vectoriel normé.
(a) Montrer que B_N est convexe.
(b) Montrer que : $\mathcal{E}(B_N) \subset S_N$.
(c) Soient $(a_1,a_2) \in B_N$, distincts. Montrer que, si $a = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2)$ appartient à S_N, alors $a_1 \in S_N$ et $a_2 \in S_N$.
En déduire l'équivalence :
$$\mathcal{E}(B_N) \neq S_N \ \Leftrightarrow \ \exists(a,b) \in S_N^2,\ a \neq b, \text{ tels que } [a,b] \subset S_N.$$
(d) Donner un exemple simple où $\mathcal{E}(B_N) \neq S_N$ (on pourra considérer $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une norme convenable).

3°) Dans cette question, $E = \mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$. E est muni de la norme euclidienne canonique définie par : $\| (x_1,\dots,x_n) \| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
C désigne une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, fermée, bornée, d'intérieur non vide, et symétrique (i.e : $\forall x \in C, -x \in C$).
(a) Montrer que C est un voisinage de 0.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Déduire de la question précédente que l'ensemble :
$\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ , } x \in \lambda.C\}$ n'est pas vide ($\lambda.C$ désignant l'ensemble $\{\lambda c \text{ , } c \in C\}$).
On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $j_C(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ , } x \in \lambda.C\}$.
(c) Montrer que j_C est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
(d) On note $B_{j_C} = \{x \in \mathbb{R}^n, j_C(x) \leq 1\}$. Montrer que : $\overset{\circ}{B}_{j_C} \subset C \subset B_{j_C}$.
En déduire : $B_{j_C} = C$.

PARTIE II

Soit E un espace vectoriel . Si N est une norme sur E, on note $\mathcal{P}_N$ la propriété suivante :
$$\text{« } \forall(x,y) \in E^2,\ N(x+y) = N(x) + N(y) \ \Rightarrow \ \{x,y\} \text{ lié »}$$
On rappelle qu'une norme N est dite euclidienne s'il existe un produit scalaire (i.e une forme bilinéaire symétrique

définie positive) $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$.

1°) Montrer que: N euclidienne $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_N$ vraie.

2°) On note: **(1)** l'énoncé: $\mathcal{P}_N$ est vérifiée
(2) l'énoncé: $\mathcal{E}(B_N) = S_N$

(a) Établir: **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** (utiliser I.2.c).

(b) Soient f,g des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose:
$$f \text{ convexe};\ g \text{ affine};\ f(1) = g(1)\,;\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) \leq g(t)$$
Démontrer que: $f = g$.

(c) On suppose ici **(2)** vérifiée.
On considère des vecteurs u et v de E, non nuls, tels que $N(u) = 1$ et $N(u+v) = 1 + N(v)$. Soient f et g les applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par:
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = N(u+tv) \quad g(t) = N(u) + tN(v)$$
A l'aide de la question précédente, montrer que $f = g$.
En déduire que le vecteur $w = \dfrac{1}{N(v)}v$ vérifie: $w \in S_N$ et $N(u+w) = N(u) + N(w)$.
Montrer alors l'égalité: $w = u$.

(d) En déduire l'implication: **(2)** $\Rightarrow$ **(1)** (si $x,y \in E$ sont non nuls et vérifient $N(x+y) = N(x) + N(y)$, on pourra poser $u = \dfrac{1}{N(x)}x$ et $v = \dfrac{1}{N(x)}y$, et utiliser (c)).

3°) On considère ici l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On note C la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par:
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1 - x^2\}$$

(a) Représenter graphiquement C.

(b) Montrer que C est une partie convexe, fermée, bornée, d'intérieur non vide, de $\mathbb{R}^2$.

(c) On note N la norme $N = j_C$ (cf. I.3). Déterminer S_N. Montrer que $\mathcal{P}_N$ est vérifiée.

(d) On veut démontrer ici que $N = j_C$ n'est pas une norme euclidienne (autrement dit, la réciproque de la propriété établie en II.1 est fausse).
Pour cela, on procède par l'absurde; supposons donc N euclidienne.
Démontrer que, dans ce cas, il existe a,b,c réels avec $c^2 - ab < 0$ tels que:
$$B_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ ax^2 + by^2 + 2cxy < 1\}$$
Conclure.

PROBLÈME 2:

On note ici E un espace préhilbertien réel.

On notera $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E. On notera $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire, et la topologie considérée sur E est celle définie par cette norme.

Si $(x,y) \in E^2$, on notera $d(x,y) = \| x - y \|$.

Enfin, on supposera que l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est complet (E s'appelle un espace de Hilbert).

1°) (a) Démontrer l'identité:
$$\forall (x,y) \in E^2\ ,\ \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

(b) En déduire que, si a,b,c sont trois éléments de E et si $m = \dfrac{b+c}{2}$, on a:
$$\| a - b \|^2 + \| a - c \|^2 = 2\| a - m \|^2 + \frac{1}{2}\| b - c \|^2.$$

2°) Soit A une partie non vide de E, et a un élément de E. Justifier l'existence du réel $d(a,A) = \inf\limits_{x \in A} d(a,x)$.

3°) On suppose désormais que A est une partie convexe, fermée, non vide, de E. a désigne toujours un élément quelconque de E.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(a,x_n) = d(a,A)$.

(b) En utilisant la convexité de A et la question 1.b, montrer que (x_n) est une suite de Cauchy.

(c) En déduire qu'il existe $\alpha \in A$ tel que : $d(a,A) = d(a,\alpha)$.

(d) En utilisant 1.b, démontrer que α est l'unique élément de A vérifiant l'égalité $d(a,A) = d(a,\alpha)$.

α s'appelle la projection de a sur A.

4°) Ainsi, si A est un convexe fermé non vide de E, on a défini une application $p_A : E \to E$ telle que :

$$(i)\ \forall x \in E, p_A(x) \in A\ ;\ (ii) \forall y \in A,\ \| x - p_A(x) \| \leqslant \| x - y \|.$$

Le but de cette question est d'établir une nouvelle caractérisation de la projection $p_A(x)$ de x sur A, soit :

$$(*)\quad \forall y \in A\ ,\ (x - p_A(x) | p_A(x) - y) \geqslant 0.$$

(a) Montrer que cela équivaut à démontrer l'égalité des ensembles E_1 et E_2 suivants :

$E_1 = \{z \in A\ ,\ \forall y \in A\ ,\ \| x - z \| \leqslant \| x - y \|\}$

$E_2 = \{z \in A\ ,\ \forall y \in A\ ,\ (x - z | z - y) \geqslant 0\}$

(b) Montrer que $E_1 = E_2$.

Pour cela, on pourra commencer par établir l'identité :

$$(**)\quad \| x - y \|^2 - \| x - z \|^2 = 2(x - z | z - y) + \| z - y \|^2$$

et en déduire l'inclusion $E_2 \subset E_1$; pour prouver l'inclusion inverse, on pourra écrire **(**)** en remplaçant y par $y_t = ty + (1-t)z$ avec $t \in [0,1]$.

5°) Montrer que l'inégalité **(*)** est encore équivalente à la suivante :

$$(***)\quad \forall (x,y) \in E^2\ ,\ (x - p_A(x) | p_A(x) - p_A(y)) \geqslant 0.$$

6°) On rappelle qu'un cône de sommet O (dans $\mathbb{R}^n$) est une partie non vide C de $\mathbb{R}^n$ invariante par toute homothétie de rapport strictement positif, c'est-à-dire : $\forall \lambda > 0,\ \lambda C = C$.

On définit, à partir d'un cône C de sommet O, l'ensemble polaire de C, noté $C^\perp$, par :

$$C^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C,\ (x|y) \leqslant 0\}$$

(a) Montrer que $C^\perp$ est un cône de sommet O, convexe et fermé.

(b) Si C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, que représente $C^\perp$?

7°) Soit C un cône convexe fermé de sommet O, et $C^\perp$ son cône polaire. On se propose ici de démontrer le théorème suivant :

tout $x \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = y + y^\perp$, avec $y \in C$ et $y^\perp \in C^\perp$ et $(y|y^\perp) = 0$.

(a) Montrer l'unicité de la décomposition ci-dessus (en supposant qu'elle existe), et qu'elle est nécessairement de la forme : $x = p_C(x) + p_{C^\perp}(x)$.

(b) Montrer que $x - p_C(x)$ est un élément de $C^\perp$

(c) En utilisant l'inégalité **(*)**, achever la démonstration du théorème.

8°) Étude d'un exemple : le but de cette question est de montrer que les résultats précédents peuvent n'être plus valables dans le cas d'un espace de Banach quelconque (i.e si la norme n'est pas euclidienne).

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

(a) Démontrer que $(E, \| \ \|_\infty)$ est complet.

(b) On note C l'ensemble des $f \in E$ telles que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ f(t) \geqslant 0\ ;\ f \text{décroissante}\ ;\ 1 \leqslant f(0) \leqslant 2 \\ \qquad \text{et } \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = f(0) - 1 \end{cases}$$

i. Montrer que C est une partie convexe fermée et bornée de $(E, \| \ \|_\infty)$

ii. Montrer que $d(0,C) = 1$.

iii. Montrer qu'il n'existe aucune $f \in C$ telle que $d(0,f) = 1$.