PSI* 01-02

Corrigé DM n°9

PROBLÈME 1 [MINES-PONTS, 1974]

PARTIE I

1) a) Soit $a \in \mathcal{E}(A)$ (i.e. $A - \{a\}$ convexe), et soient $(a_1, a_2) \in A^2$ tels que $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Si, par l'absurde, on avait $a_1 \neq a_2$, alors $a_1 \neq a$ et $a_2 \neq a$ (car $a_1 = a \Leftrightarrow a_2 = a \Leftrightarrow a_1 = a$). Donc $a_1, a_2 \in A - \{a\}$, d'où $[a_1, a_2] \subset A - \{a\}$. Or $a \in [a_1, a_2]$, d'où la contradiction.

Finalement, on a bien : $\underline{a \in \mathcal{E}(A) \Rightarrow \mathcal{P}_a}$

b) Soit $a \notin \mathcal{E}(A)$. Alors $A - \{a\}$ non convexe, ce qui s'écrit :

$$\exists (a_1, a_2) \in (A - \{a\})^2 \text{ tq } [a_1, a_2] \not\subset A - \{a\} \qquad (1)$$

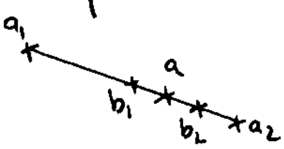
Mais, puisque $(a_1, a_2) \in A^2$ et que A est convexe, on a $[a_1, a_2] \subset A$ (2)

D'après (1) et (2) : $a \in [a_1, a_2]$ i.e. $\exists t \in [0,1]$ tq $a = t a_1 + (1-t) a_2$

Or les cas $a_1 = a_2$ ou $t = 0$ ou $t = 1$ sont impossibles (car $a_1 \neq a$ et $a_2 \neq a$).

On a donc bien : $\underline{\exists (a_1, a_2) \in A^2,\ a_1 \neq a_2 \text{ et } \exists t \in]0,1[\text{ tq } a = t a_1 + (1-t) a_2}$.

c) Soit $a \notin \mathcal{E}(A)$. On construit alors a_1, a_2 et t comme dans le résultat précédent. On peut alors facilement trouver $b_1, b_2 \in [a_1, a_2]$, $b_1 \neq b_2$ tels que $a = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ (cf. figure ci-contre, justifiez...)



On a donc montré : $a \notin \mathcal{E}(A) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{P}_a)$

soit encore : $\mathcal{P}_a \Rightarrow a \in \mathcal{E}(A)$.

Finalement : $\underline{a \in \mathcal{E}(A) \Leftrightarrow \mathcal{P}_a}$

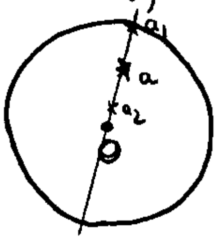
---

2) a) Soient $a, b \in B_N$ et $t \in [0,1]$. Alors, pour tout $t \in [0,1]$:

$$N(ta + (1-t)b) \leq t \underbrace{N(a)}_{\leq 1} + (1-t) \underbrace{N(b)}_{\leq 1} \leq 1 \qquad (\text{car } t, 1-t \geq 0)$$

donc $ta + (1-t)b \in B_N$. Ainsi, $\underline{[a,b] \subset B_N \text{ et } B_N \text{ est convexe}}$.

b) Soit $a \in \mathcal{E}(B_N)$. Puisque $\mathcal{E}(B_N) \subset B_N$, on a déjà $N(a) \leq 1$



- On ne peut pas avoir $a = 0$, car $B_N - \{0\}$ n'est pas convexe (considérer un segment de B_N de milieu 0 !)
- soit donc $a_1 = \dfrac{a}{N(a)}$: $N(a_1) = 1$, donc $a_1 \in B_N$ (et $a_1 \in \underline{S_N}$)

et soit a_2 tel que $a = \frac{1}{2}(a_1+a_2)$ i.e. $a_2 = 2a - a_1 = \frac{2N(a)-1}{N(a)} a$ ②

Alors $N(a_2) = \frac{2N(a)-1}{N(a)} \cdot N(a) = 2N(a)-1 \leq 1$, donc $a_2 \in B_N$.

Ainsi : $a = \frac{1}{2}(a_1+a_2)$ avec $(a_1,a_2) \in (B_N)^2$. Puisque $a \in \mathcal{E}(B_N)$, $\mathcal{P}_a$ est vraie donc $a_1 = a_2$. D'où $a = a_1 = a_2$ et $a \in S_N$: Finalement, $\mathcal{E}(B_N) \subset S_N$.

c) * Soient $a_1, a_2 \in B_N$ tels que $a_1 \neq a_2$, et supposons $a = \frac{1}{2}(a_1+a_2) \in S_N$, i.e. $N(a) = 1$, soit encore $N(a_1+a_2) = 2$. Puisque $N(a_1+a_2) \leq \underbrace{N(a_1)}_{\leq 1} + \underbrace{N(a_2)}_{\leq 1} \leq 2$ on a donc nécessairement $N(a_1) = N(a_2) = 1$, soit $a_1, a_2 \in S_N$

* Supposons qu'il existe $(a,b) \in S_N^2$, $a \neq b$, tels que $[a,b] \subset S_N$. Alors, si $c = \frac{1}{2}(a+b)$, $c \in [a,b]$ donc $c \in S_N$. On a donc : non$(\mathcal{P}_c)$ i.e. $c \notin \mathcal{E}(B_N)$. Ainsi, $\mathcal{E}(B_N) \neq S_N$, ce qui démontre l'implication : $\Leftarrow$

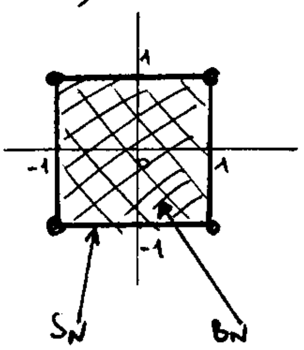
* Réciproquement, supposons $\mathcal{E}(B_N) \subsetneq S_N$. Cela signifie qu'il existe $a \in S_N$ et $a \notin \mathcal{E}(B_N)$, soit $a \in S_N$ et non$(\mathcal{P}_a)$, soit $a \in S_N$ et $\exists (a_1,a_2) \in B_N^2$ $(a_1 \neq a_2)$ tq $a = \frac{a_1+a_2}{2}$. D'après la question précédente, on a : $a_1, a_2 \in S_N$.

Montrons $[a_1,a_2] \subset S_N$ (ce qui démontrera l'implication $\Rightarrow$)

Soit $x \in [a_1,a_2]$; si $x = a_1$ ou $x = a_2$ ou $x = a$, on a bien $x \in S_N$; sinon, soit $y = 2a - x$ (i.e. $a = \frac{x+y}{2}$). On a alors : $x \neq y$, $(x,y) \in B_N^2$ (facile à vérifier..) et $a = \frac{x+y}{2} \in S_N$. D'après la question précédente, $x \in S_N$, ce qui achève la démonstration.

---

d) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la norme $\| \|_\infty$: $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$



$B_N = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \}$

$S_N = \{ (x,y) \in B_N^2 \text{ tq } |x| = 1 \text{ ou } |y| = 1 \}$

Il est facile de vérifier (en utilisant p.ex. la question 1) que $\mathcal{E}(B_N) = \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$

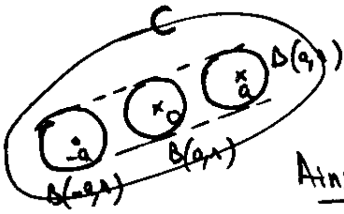
Donc : $\mathcal{E}(B_N) \subsetneq S_N$

3) a) C est d'intérieur non vide, ce qui se traduit, par déf. de l'intérieur :

$$\exists a \in C,\ \exists r > 0 \text{ tq } B(a,r) \subset C.$$

C étant symétique p.r. à O, on en déduit aisément que $B(-a,r) \subset C$

et, en utilisant la convexité de C, que $B(0,r) \subset C$



(en effet : si $x \in B(0,r)$, $x = \frac{1}{2}\left[(a+x)+(x-a)\right]$ avec $a+x \in B(a,r)$ et $x-a \in B(-a,r)$)

Ainsi : $\exists r>0$ tq $B(0,r) \subset C$, d'où C voisinage de O.

b) • Si $x=0$, $\{\lambda \in \mathbb{R}_+^*, x \in \lambda C\} = \mathbb{R}_+^*$ (car $0 \in C$)

• Si $x \neq 0$: $\exists r>0$ tq $B(0,r) \subset C$ (question précédente). Soit alors $c = \frac{r}{2\|x\|}x$. Alors $c \in B(0,r)$, donc $c \in C$, et $x = \lambda . c$ avec $\lambda = \frac{2\|x\|}{r}$.

• On a montré dans les deux cas qu'il existe $\lambda>0$ tel que $x \in \lambda . C$

Donc : $\{\lambda > 0,\ x \in \lambda . C\}$ est non vide.

c) • Ce qui précède permet de démontrer que la définition de j_C a bien un sens, car $\{\lambda>0,\ x\in\lambda.C\}$ est une partie non vide minorée (par 0) de $\mathbb{R}$ (donc sa borne inf. existe)

• $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $j_C(x) \geqslant 0$ d'après ce qui précède.

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tq $j_C(x)=0$. Par définition de la borne inférieure :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \lambda \in]0,\varepsilon[\text{ tq } x \in \lambda.C$$

Or C est borné : $\exists M \geqslant 0$ tq $\forall c \in C$, $\|c\| \leqslant M$. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \lambda \in]0,\varepsilon[\text{ tq } \|x\| \leqslant \lambda M$$

d'où $\forall \varepsilon>0$, $\|x\| < \varepsilon M$. Ainsi, $\|x\|=0$ puis $x=0$.

• Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$j_C(\mu x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \mu x \in \lambda . C\}$$

$$= \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+^*, x \in \frac{\lambda}{\mu} C\}$$

Or $x \in \frac{\lambda}{\mu} C \Leftrightarrow x \in \frac{\lambda}{|\mu|} C$ (car C symétrique p.r. à O)

Donc $j_C(\mu x) = \inf\{|\mu|\lambda' \in \mathbb{R}_+^*, x \in \lambda' C\}$ (en posant $\lambda' = \frac{\lambda}{|\mu|}$)

soit finalement : $j_C(\mu x) = |\mu| \inf\{\lambda' \in \mathbb{R}_+^*, x \in \lambda'.C\}$

$$= |\mu|\, j_C(x)$$

(et cette égalité reste évidemment vraie pour $\mu = 0$)

- Soient enfin $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pour tous $\lambda, \mu > 0$ tels que $x \in \lambda C$ et $y \in \mu.C$ on a : $x = \lambda c$ et $y = \mu c'$ avec $(c, c') \in C^2$.

D'où $x + y = \lambda c + \mu c' = \lambda+\mu\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} c + \frac{\mu}{\lambda+\mu} c'\right) \in (\lambda+\mu).C$

(en effet, $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} c + \frac{\mu}{\lambda+\mu} c'$ appartient à C car C est convexe)

Donc, par définition de j_C : $j_C(x+y) \leq \lambda + \mu$.

Cette inégalité étant valable pour tous λ et μ tels que $x \in \lambda.C$ et $y \in \mu.C$ on en déduit : $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$

- Tout ce qui précède montre que : <u>j_C est une norme sur $\mathbb{R}^n$</u>

d) • Si $x \in C$, $x \in 1.C$ d'où $j_C(x) \leq 1$. Ainsi : $C \subset B_{j_C}$

- Soit $x \in \mathring{B}_{j_C}$, i.e. $j_C(x) < 1$. Par définition de la borne inférieure :

$\exists \lambda > 0$ tq $j_C(x) \leq \lambda < 1$ et $x \in \lambda C$, soit $x = \lambda c$ avec $c \in C$.

On a alors $x \in [0, c]$ d'où $x \in C$ puisque C est convexe.

D'où : $\mathring{B}_{j_C} \subset C \subset B_{j_C}$

- Donc $\overline{\mathring{B}_{j_C}} \subset \overline{C} \subset \overline{B_{j_C}}$. Mais $\overline{\mathring{B}_{j_C}} = B_{j_C} = \overline{B_{j_C}}$ et $C = \overline{C}$ d'où, en conclusion : <u>$C = B_{j_C}$</u>

<u>PARTIE II</u>

1) N euclidienne $\Rightarrow \mathcal{P}_N$ vraie découle directement du cours (cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowsky dans un espace préhilbertien).

---

2) a) Supposons $\mathcal{P}_N$ vérifiée. On sait déjà que $\mathcal{E}(B_N) \subset S_N$ d'après I.2.b.

Si $\mathcal{E}(B_N) \neq S_N$, il existe $(a,b) \in S_N^2$ tq $a \neq b$ et $[a,b] \subset S_N$ d'après I.2.c.

On aurait alors $\frac{1}{2}(a+b) \in S_N$ soit $N\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) = 1$ soit $N(a+b) = 2 = N(a) + N(b)$

Donc, d'après $\mathcal{P}_N$, $\{a, b\}$ est lié.

Mais a, b étant de normes 1, cela implique $a = \pm b$.

Or : le cas $a = b$ est exclu.

le cas $a = -b$ donne $\frac{1}{2}(a+b) = 0$ alors que $\frac{1}{2}(a+b) \in S_N$!

D'où la contradiction, et, finalement : $\underline{\mathcal{E}(B_N) = S_N}$

b) Soient f et g comme dans l'énoncé, et soient $a, b \geq 0$ tels que $a < 1 < b$.

On a alors : $\exists t \in]0,1[$ tq $1 = ta + (1-t)b$ et :

$$f(1) = f(ta + (1-t)b) \underset{f \text{ convexe}}{\leq} t f(a) + (1-t) f(b) \underset{f \leq g}{\leq} t g(a) + (1-t) g(b) \underset{g \text{ affine}}{=} g(ta + (1-t)b) = g(1)$$

Puisque $f(1) = g(1)$, les inégalités ci-dessus sont des égalités. On en déduit

$$t f(a) + (1-t) f(b) = t g(a) + (1-t) g(b)$$

$$\text{soit } t\,[\underbrace{g(a) - f(a)}_{\geq 0}] = (1-t)\,[\underbrace{f(b) - g(b)}_{\leq 0}]$$

d'où $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$

On a donc bien : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = g(x)}$

c) * Il est facile de montrer que f et g, définies dans l'énoncé, vérifient bien les hypothèses de la question précédente (on utilise principalement l'inégalité triangulaire pour N).

On en déduit alors $f = g$ soit : $\forall t \geq 0,\ N(u + tv) = N(u) + t N(v)$

* Si on pose donc $w = \frac{1}{N(v)} v$, on a $N(w) = \frac{N(v)}{N(v)} = 1$, soit $\underline{w \in S_N}$

et $N(u + w) = N\left(u + \frac{1}{N(v)} v\right) = N(u) + \frac{1}{N(v)} N(v) = N(u) + 1 = N(u) + N(w) = 2$.

* Donc $u \in S_N$, $w \in S_N$ et $\frac{u+w}{2} \in S_N$. Puisque $S_N = \mathcal{E}(B_N)$, on déduit de I.1 : $\underline{u = w}$

d) On suppose encore $\mathcal{E}(B_N) = S_N$. Soient x, y tels que $N(x+y) = N(x) + N(y)$

On veut donc démontrer $\{x, y\}$ lié.

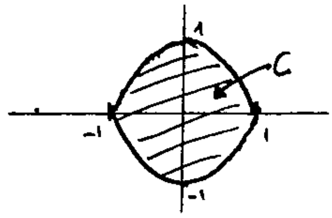
- c'est immédiat si $x = 0$ ou $y = 0$
- sinon, posons $u = \frac{1}{N(x)} x$ et $v = \frac{1}{N(x)} y$ $(v \neq 0)$. Alors $N(u) = 1$

et $N(u+v) = N\left(\frac{x+y}{N(x)}\right) = \frac{1}{N(x)} N(x+y) = \frac{1}{N(x)}[N(x) + N(y)] = 1 + N\left(\frac{y}{N(x)}\right) = 1 + N(v)$

D'après la question précédente, $u = \frac{1}{N(v)} v$, donc $\{u, v\}$ lié donc $\{x, y\}$ lié.

Conclusion : on a donc démontré (2) $\Rightarrow$ (1) et finalement : $\underline{(1) \Leftrightarrow (2)}$.

3) a) C est la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \pm 1$ et les paraboles d'équations $y = \pm(1-x^2)$



b) On peut écrire : $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ où :

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 1\}$ $\quad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq -1\}$

$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 1-x^2\}$ $\quad C_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2-1\}$

- C_1 et C_2 sont convexes : ce sont des demi-plans.
- C_3 et C_4 sont convexes : en effet, si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ on sait que son épigraphe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y \geq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$

Donc C, intersection de parties convexe, est <u>une partie convexe.</u>

- C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des <u>fermés</u>.

En effet, par exemple, $C_4 = F^{-1}([0,+\infty[)$ où $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto y - x^2 + 1$

donc C_4 est l'image réciproque par F continue d'un fermé de $\mathbb{R}$, donc est fermé.

Donc C, intersection de fermés, est <u>un fermé</u>.

- C est <u>bornée</u>, de façon évidente
- $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$ car, par exemple, la boule de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ (pour la norme euclidienne canonique) est incluse dans C (à vérifier par le calcul !)
- Enfin, C est <u>symétrique</u> car $(x,y) \in C \Rightarrow (-x,-y) \in C$.

c) • $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1 \text{ et } |y| < 1-x^2\}$ est un <u>ouvert</u> de $\mathbb{R}^2$, pour une raison similaire à celle ci-dessus : image réciproque d'un ouvert par une appl. continue. Et c'est le plus grand ouvert inclus dans C, car si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $|x| \leq 1$ et $|y| = 1-x^2$, toute boule de centre (x,y) rencontre à la fois C et son complémentaire.

Ainsi : $\underline{S_N = B_N - \overset{\circ}{B}_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1 \text{ et } |y| = 1-x^2\}}$ $\quad (= C - \overset{\circ}{C})$

- On a $\mathcal{E}(B_N) = S_N$, car S_N ne contient, de façon évidente, aucun segment $[a,b]$ avec $a \neq b$ (et on utilise alors I.2.c).

D'après II.2., on en déduit que $\mathcal{P}_N$ est vérifiée.

d) Soit N une norme euclidienne, et φ le produit scalaire dont elle dérive.

Si $(x,y) = xe_1 + ye_2$, avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, on a :

$$[N(x,y)]^2 = \varphi[(x,y),(x,y)] = \varphi(xe_1+ye_2, xe_1+ye_2)$$
$$= x^2\varphi(e_1,e_1) + 2xy\,\varphi(e_1,e_2) + y^2\varphi(e_2,e_2)$$
$$= ax^2 + 2cxy + by^2 \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

De plus, on doit avoir $c^2 - ab < 0$ pour que φ soit définie positive (sinon le trinôme $aX^2 + 2cX + b$ aurait une racine, et on construirait alors facilement $(x,y) \neq (0,0)$ tq $[N(x,y)]^2 = 0$ ...)

Ainsi : $B_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ax^2 + by^2 + 2cxy < 1\}$

donc B_N est, du point de vue géométrique, l'intérieur d'une ellipse

On ne peut donc pas avoir $B_N = C$, donc j_C n'est pas euclidienne.

PROBLÈME II (EITPE 1982)

1) Calculs simples (le b) s'appelle la formule de la médiane) et s'obtient en appliquant a) avec $x = a - m$ et $y = \frac{b-c}{2}$

---

2) cf. cours : $\{d(a,x),\ x \in A\}$ est un ensemble de réels non vide, minoré par 0, donc admet une borne inférieure.

---

3) a) Par définition de la borne inf. : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A$ tq $d(a,A) \leq d(a,x) < d(a,A) + \varepsilon$

En appliquant cela avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(a,A) \leq d(a,x_n) < d(a,A) + \frac{1}{n}$

donc telle que $\lim\limits_{n\to\infty} d(a,x_n) = d(a,A)$.

b) On a alors, pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$:

$$\|a - x_p\|^2 + \|a - x_q\|^2 = 2\left\|a - \frac{x_p + x_q}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x_p - x_q\|^2$$

d'où $\|x_p - x_q\|^2 = 2\|a - x_p\|^2 + 2\|a - x_q\|^2 - 4\left\|a - \frac{x_p+x_q}{2}\right\|^2$

Or $\frac{x_p+x_q}{2} \in A$ car A est convexe, donc $\|a - \frac{x_p+x_q}{2}\| \geqslant d(a,A)$

D'autre part, $\|a-x_q\| \leqslant d(a,A)+\frac{1}{q}$ et $\|a-x_p\| \leqslant d(a,A)+\frac{1}{p}$.

On en déduit :

$$\|x_p-x_q\|^2 \leqslant \left(\frac{4}{p}+\frac{4}{q}\right)d(a,A) + \frac{2}{p^2}+\frac{2}{q^2}$$

Ainsi $\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} \|x_p-x_q\| = 0$: (x_n) est donc une suite de Cauchy.

c) E étant complet, (x_n) est convergente dans E, donc dans A puisque A est fermé. Donc $\exists \alpha \in A$ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Par continuité de la distance, on a $d(a,\alpha) = \lim_{n\to\infty} d(a,x_n)$ soit $d(a,\alpha) = d(a,A)$

d) S'il existe $\alpha,\beta \in A$ tq $d(a,\alpha) = d(a,\beta) = d(a,A)$, alors :

$$\|a-\alpha\|^2 + \|a-\beta\|^2 = 2\left\|a - \frac{\alpha+\beta}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2$$

Or $\frac{\alpha+\beta}{2} \in A$ car A convexe, donc $\left\|a-\frac{\alpha+\beta}{2}\right\|^2 \geqslant d(a,A)^2$ d'où :

$$\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2 \leqslant d(a,A)^2 + d(a,A)^2 - 2d(a,A)^2 = 0 \text{ soit } \alpha=\beta.$$

---

4) La formulation de l'énoncé est particulièrement obscure. Je pense qu'il faut comprendre (*) par :

(*) $p_A(x)$ est l'unique élt $z \in A$ tel que $(x-z|z-y) \geqslant 0$

a) Avec cette formulation il est clair que cela équivaut à montrer $E_1 = E_2$.
En effet, on a en fait : $E_1 = \{p_A(x)\}$ par définition et unicité de la projection ! (à quoi sert donc E_1 ?)
Donc montrer $E_1 = E_2$ équivaut à dire $E_2 = \{p_A(x)\}$

i.e. à : $p_A(x)$ est l'unique $z \in A$ tq $(x-z|z-y) \geqslant 0$

i.e. à (*)

b) • l'identité demandée est facile à établir.

• Soit $z \in E_2$; alors, $\forall y \in A$, $(x-z|z-y) \geqslant 0$, donc $\|x-y\|^2 - \|x-z\|^2 \geqslant 0$ d'où $\|x-z\| \leqslant \|x-y\|$ et $z \in E_1$. Donc $E_2 \subset E_1$

• Réciproquement, soit $z \in E_1$ et $y \in A$ quelconque. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, $y_t = ty+(1-t)z$ appartient à A car A convexe.

On a donc : $\|x-z\| \leq \|x-y_t\|$ (puisque $z \in E_1$)

d'où $\|x-ty-(1-t)z\|^2 - \|x-z\|^2 \geq 0$

d'où $2(x-z \mid t(z-y)) + \|t(z-y)\|^2 \geq 0$ (en utilisant (**))

d'où $t^2\|z-y\|^2 + 2t(x-z \mid z-y) \geq 0$

d'où $t\|z-y\|^2 + 2(x-z \mid z-y) \geq 0$ pour tout $t \in]0,1]$

En faisant tendre t vers 0^+, on obtient : $(x-z \mid z-y) \geq 0$ soit $z \in E_2$.

Ainsi, $E_1 \subset E_2$ et, finalement $\underline{E_1 = E_2}$

---

5) • $(*) \Rightarrow (***)$: il suffit d'appliquer $(*)$ avec $p_A(y)$ à la place de y (ce qui est possible car $p_A(y) \in A$), et on obtient l'inégalité cherchée.

• $(***) \Rightarrow (*)$: si $y \in A$, on a $p_A(y) = y$ d'où $(***) \Rightarrow (x - p_A(x) \mid p_A(x) - y) \geq 0$ pour $\forall y \in A$.

---

6) a) • Soit $y \in C^\perp$. Alors $\forall x \in C$, $(x|y) \leq 0$ donc $\forall x \in C, \forall \lambda > 0$ $(x|\lambda y) \leq 0$.
Par suite $\lambda y \in C^\perp$ i.e. $\lambda C^\perp \subset C^\perp$.
Mais on a de la même façon : $\frac{1}{\lambda} C^\perp \subset C^\perp$ soit $C^\perp \subset \lambda C^\perp$
et finalement $\lambda C^\perp = C^\perp$. Enfin, $C^\perp$ est non vide car $0 \in C^\perp$ de façon évidente : $\underline{C^\perp \text{ est donc bien un cône de sommet } 0.}$

• Soient $y, z \in C^\perp$ et $t \in [0,1]$. Alors, pour $\forall x \in C$:

$$(x \mid ty + (1-t)z) = t\underbrace{(x|y)}_{\leq 0} + (1-t)\underbrace{(x|z)}_{\leq 0} \leq 0 \quad \text{car } t \in [0,1]$$

donc $ty + (1-t)z \in C^\perp$: $\underline{C^\perp \text{ est convexe.}}$

• Soit, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_x : y \in \mathbb{R}^n \longmapsto (x|y)$

φ_x est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ de dimension finie, donc φ_x est <u>continue</u>. Par suite, $\{y \text{ tq } \varphi_x(y) \leq 0\}$, qui est l'image réciproque par φ_x du fermé $]-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$C^\perp = \bigcap_{x \in C} \varphi_x^{-1}(]-\infty, 0]) \text{ est } \underline{\text{fermé}} \text{ (comme intersection de fermés)}$$

(10)

b) Si C est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ alors, si $x \in C$, $-x \in C$.
Donc si $y \in C^\perp$, on a $(x|y) \leq 0$ et $(-x|y) \leq 0$ d'où $(x|y) = 0$.
Ainsi, $C^\perp$ est le s.e.v. orthogonal à C.

---

7) a) Supposons que l'on puisse écrire $x = y + y^\perp$ avec $y \in C$, $y^\perp \in C^\perp$ et $(y|y^\perp) = 0$
Alors, pour tout $z \in C$: $(x-y|y-z) = (y^\perp|y-z) = \underbrace{(y^\perp|y)}_{=0} - \underbrace{(y^\perp|z)}_{\leq 0} \geq 0$.
D'après la caractérisation $(*)$, cela montre que $y = p_C(x)$
$y^\perp = p_{C^\perp}(x)$ se démontre exactement de la même manière ; ainsi, la décomposit[ion] si elle existe, est unique et est de la forme demandée.

b) • On sait que : $\forall y \in C$, $(x - p_C(x) | p_C(x) - y) \geq 0$. $\otimes$
Or $p_C(x) \in C$, donc $2p_C(x) \in C$ (car C cône) donc, en appliquant ce qui précède à $y = 2p_C(x)$, on obtient : $(x - p_C(x) | -p_C(x)) \geq 0$ soit $(x - p_C(x) | p_C(x)) \leq 0$
• D'autre part, $0 \in C$: en effet, si $c \in C$ (c existe car $C \neq \emptyset$), on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda c \in C$. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}.c \in C$ donc $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}c\right) \in C$ car C fermé. Donc $0 \in C$.
En appliquant la relation précédente $\otimes$ à $y = 0$, on trouve :
$$(x - p_C(x) | p_C(x)) \geq 0.$$
Finalement, on a montré que : $(x - p_C(x) | p_C(x)) = 0$
• La relation $\otimes$ donne alors : $\forall y \in C$ $\underbrace{(x - p_C(x) | p_C(x))}_{=0} - (x - p_C(x) | y) \geq 0$
soit $(x - p_C(x) | y) \leq 0$. Ainsi $x - p_C(x) \in C^\perp$.

c) En posant $y^\perp = x - p_C(x)$, on a bien : $x = y + y^\perp$, $y \in C$, $y^\perp \in C^\perp$
et $y = p_C(x)$
et $(y|y^\perp) = 0$ (cf ci-dessus)

CQFD.
