DS n°8 (le 31/03/2012)

UN PROBLÈME AU CHOIX

PROBLÈME I :

Banque d'Epreuves ECRIN - 1995

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Il est notamment demandé aux candidats $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses. En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.*

"L'usage de la calculatrice est autorisé".

Notations :

- Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $[\![1,n]\!] = \{1,2,\dots,n\}$.
- Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies, continues, 2π-périodiques et impaires sur $\mathbb{R}$.
- Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note φ_j la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_j(x) = \sin(jx)$.

  Pour $n \in \mathbb{N}^*$, E_n désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$; on note alors $E_n = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$.
- On munit E du produit scalaire

$$< f,g > = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

  (on ne demande pas de démontrer que c'est un produit scalaire sur E).
- Pour $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \text{Sup}\{|f(t)|\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Partie I

Dans cette partie I, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
On note alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\theta_p = \dfrac{p\,\pi}{n+1}$; donc $\theta_p = p\,\theta_1$.

1° Calculer $<\varphi_p, \varphi_q>$ pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$.
En déduire que $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base orthogonale de E_n.

2° **a)** Montrer que

$$(\forall\ p \in \mathbb{Z}) \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \cos(k\,\theta_p) = \begin{cases} 2n+2 & \text{si } p \equiv 0 \text{ modulo } (2n+2) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

b) Pour $(p,q) \in [\![1,n]\!] \times \mathbb{Z}$, on note

$$S_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\,\theta_p)\sin(k\,\theta_q).$$

Montrer que

$$S_{p,q} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} \sin(k\,\theta_p)\sin(k\,\theta_q).$$

c) Déduire de ce qui précède que pour $(p,q) \in [\![1,n]\!] \times \mathbb{Z}$ on a

$$S_{p,q} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{si } q \equiv p \text{ modulo } (2n+2) \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } q \equiv -p \text{ modulo } (2n+2) \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

3° Soit $A_n = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \sin\left(\dfrac{ij\,\pi}{n+1}\right) = \sin(ij\,\theta_1)$.

a) Calculer A_n^2 en utilisant les formules du **I.2.c)**.

Montrer que la matrice $B_n = \sqrt{\dfrac{2}{n+1}}\,A_n$ est une matrice orthogonale.

b) Montrer que B_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs propres.

c) *Etude d'un cas particulier* : Dans cette question seulement, on suppose $n = 3$. Déterminer B_3 et une base de chaque sous-espace propre de B_3 (on choisira des vecteurs de première coordonnée 1).

4° a) Montrer que pour tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique fonction $h \in E_n$ telle que $h(\theta_p) = x_p$ pour tout $p \in [\![1,n]\!]$.

Montrer que si $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sont les composantes de h dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{2}{n+1} A_n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

b) Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note γ_j l'unique fonction de E_n telle que

$$(\forall\ i \in [\![1,n]\!]) \quad \gamma_j(\theta_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Montrer que $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ est une base de E_n.

Montrer que pour $f \in E_n$ on a

$$f = \sum_{j=1}^{n} f(\theta_j)\,\gamma_j.$$

En déduire la matrice de passage de la base Γ à la base $\mathcal{B}$.

c) Soit u l'application qui à tout élément f de E_n associe la fonction $u(f)$ définie par

$$(\forall\ x \in \mathbb{R}) \quad u(f)(x) = f\Big(x + \frac{\pi}{n+1}\Big) + f\Big(x - \frac{\pi}{n+1}\Big).$$

Montrer que u est un endomorphisme de E_n.

Déterminer les matrices de u dans les bases Γ et $\mathcal{B}$, notées respectivement G et F.

En déduire le produit matriciel $A_n\,G A_n$.

Partie II

Soit n un entier strictement positif. Dans cette partie, on note pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\theta_p(n) = \dfrac{p\,\pi}{n+1}$.

1° **a)** Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction $h \in E_n$ telle que

$$(\forall\ p \in [\![1, n]\!]) \quad h(\,\theta_p(n)) = f(\,\theta_p(n)).$$

On notera $F_n(f)$ cette fonction h. On a donc : $(\forall\ p \in [\![1, n]\!]) \quad F_n(f)\,(\,\theta_p(n)) = f(\,\theta_p(n))$.
On notera enfin

$$F_n(f) = \sum_{k=1}^{n} d_k^{(n)}(f)\ \varphi_k$$

la décomposition de $F_n(f)$ dans la base $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

b) *Etude d'un exemple* : Dans cette question, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = (\sin t)^3$.

Montrer que $g \in E$ et déterminer les fonctions $F_1(g)$, $F_2(g)$ et $F_3(g)$.

2° Si $n \geqslant 1$ est fixé, montrer que l'application F_n de E dans E_n qui à $f \in E$ associe $F_n(f)$ est linéaire et déterminer sa restriction à E_n.

3° Soit $f \in E$.

a) Montrer que pour $n \geqslant 1$

$$(\forall\ k \in [\![1, n]\!]) \quad d_k^{(n)}(f) = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^{n} f(\,\theta_p(n))\ \sin\left(k\ \theta_p(n)\right).$$

b) Montrer que pour $k \geqslant 1$ fixé, la suite $\left(d_k^{(n)}(f)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite qu'on exprimera à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

Dans la suite du problème, pour $f \in E$ et $k \geqslant 1$, on note

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\ \sin(k\,t)\,dt$$

et

$$\sum_{k \geqslant 1} b_k(f)\ \sin(k\,t)$$

la série de Fourier de f.

Enfin, pour $f \in E$, on dit que f est *développable en série de Fourier* sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et admet f pour somme.

4° Montrer que si $f \in E$ est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$, alors

$$(\forall\ n \in \mathbb{N}^*)\,(\forall\ k \in [\![1, n]\!]) \quad d_k^{(n)}(f) = b_k(f) + \sum_{s=1}^{+\infty} \left[b_{k+(2n+2)s}(f) - b_{-k+(2n+2)s}(f)\right]$$

(on pourra utiliser les formules du **I.2)**).

5° Dans cette question, on considère à nouveau la fonction $g(t) = (\sin t)^3$.

a) Montrer que g est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et déterminer son développement.

b) Retrouver, en utilisant les résultats de la question **II.4)**, les fonctions $F_1(g), F_2(g), F_3(g)$ et déterminer $F_j(g)$ pour $j > 3$.

Partie III

Dans toute cette partie, on considère la fonction

$$f(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} y - \cos t}\, dy.$$

1° Montrer que $f(t)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2° Pour y fixé dans $[1, +\infty[$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fonction de la variable complexe z

$$L(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2z \operatorname{ch} y + 1}.$$

En déduire, en posant $z = e^{it}$, que si t est fixé dans $\mathbb{R}$

$$(\forall\ y \in [1, +\infty[) \quad h(y) = \frac{\sin t}{\operatorname{ch} y - \cos t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(nt)}{e^{ny}}.$$

3° Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ny}}{1 - e^{-y}}\, dy.$$

En déduire que

$$(\forall\ t \in \mathbb{R}) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2e^{-n}}{n} \sin(nt)$$

et que la convergence de cette série est uniforme sur $\mathbb{R}$.

4° Montrer que $f \in E$, que f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa série de Fourier.

Vérifier que $(\forall\ j \in \mathbb{N}^*) \quad |b_j(f)| \leqslant 2e^{-j}$.

5° Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(t)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f et $R_n(t)$ son reste d'ordre n, soit

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k(f) \sin(kt) \quad \text{et} \quad R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k(f) \sin(kt).$$

a) Montrer que $F_n(S_n) = S_n$.

b) Montrer que $\|R_n\|_\infty \leqslant 4e^{-(n+1)}$.

c) Si on note $F_n(R_n)(t) = \sum_{k=1}^{n} r_k^{(n)} \sin(kt)$, montrer, en utilisant **II.4)**, que

$$\left| r_k^{(n)} \right| \leqslant 8 \operatorname{ch}(k) e^{-(2n+2)}.$$

6° Déduire de ce qui précède que la suite de fonctions $(F_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.