PROBLÈME I (ECRIN M 1995)

Partie I

1. – Si $p \neq q$, on obtient, en écrivant $\sin px \sin qx = \dfrac{1}{2}\left[\cos((p-q)x) - \cos((p+q)x)\right]$, $\langle \varphi_p \,|\, \varphi_q \rangle = 0$.

– Si $p = q$, on obtient, en écrivant $\sin^2 px = \dfrac{1-\cos(2px)}{2}$, $\langle \varphi_p \,|\, \varphi_p \rangle = \frac{1}{2}$.

– $\mathcal{B}$ est donc une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E_n, donc est une famille libre. Par définition de E_n, c'en est aussi une famille génératrice. Donc c'est une base orthogonale de E_n.

2. a) On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n+1} \cos(k\theta_p) &= \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \mathrm{e}^{ik\theta_p}\right) \\
&= \begin{cases} 2n+2 & \text{si } \theta_p \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \mathcal{R}e\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{(2n+2)i\theta_p}}{1-\mathrm{e}^{i\theta_p}}\right) & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2n+2 & \text{si } p \equiv 0 \pmod{2n+2} \\ \mathcal{R}e\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{2ip\pi}}{1-\mathrm{e}^{i\theta_p}}\right) & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2n+2 & \text{si } p \equiv 0 \pmod{2n+2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Pour $k = 0$, le terme est nul. On est ramené à montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \sin(k\theta_p)\sin(k\theta_q) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta_p)\sin(k\theta_q)$$

En changeant k en $2n+2-k$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n+1} \sin(k\theta_p)\sin(k\theta_q) &= \sum_{k=1}^{n+1} \sin(2\pi - k\theta_p)\sin(2\pi - k\theta_q) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-\sin(k\theta_p))(-\sin(k\theta_q)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta_p)\sin(k\theta_q) \quad \text{puisque le terme pour } k = n+1 \text{ est nul}
\end{aligned}$$

c) On écrit

$$\sin k\theta_p \sin k\theta_q = \frac{1}{2}\left[\cos(k(\theta_p - \theta_q)) - \cos(k(\theta_p + \theta_q))\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(k(\theta_{p-q})) - \cos(k(\theta_{p+q}))\right],$$

et on applique **2.a)**, en remplaçant p par $p-q$, puis par $p+q$ (sachant qu'on ne peut pas avoir simultanément $p \equiv q \pmod{2n+2}$ et $p \equiv -q \pmod{2n+2}$ puisque $p \in [\![1\,;n]\!]$).

3. a) D'après la formule du produit matriciel, le terme d'indice (i,j) de A_n^2 est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \sin(ik\theta_1)\sin(kj\theta_1) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta_i)\sin(k\theta_j) = S_{i,j}.$$

Puisque $2 \leqslant i+j \leqslant 2n$, le cas $i+j \equiv 0 \pmod{2n+2}$ ne peut pas se produire, et le cas $i \equiv j \pmod{2n+2}$ ne peut se produire que pour $i = j$. Compte tenu du calcul fait à la question précédente, on en déduit donc $A_n^2 = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

Il en résulte que $B_n^2 = I_n$. Or A_n, donc B_n, est clairement symétrique. Donc on a aussi ${}^tB_nB_n = I_n$, donc B_n est orthogonale.

b) B_n est symétrique et réelle, donc diagonalisable. Le polynôme $X^2 - 1$ étant annulateur de B_n, les valeurs propres sont dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ (ce qui est de toute façon le cas de toute matrice orthogonale). B_n étant diagonalisable, elle possède des valeurs propres. Si elle n'avait qu'une seule valeur propre, elle serait semblable à une matrice scalaire, donc scalaire elle-même, ce qui n'est pas. Donc 1 et -1 sont effectivement valeurs propres.

c) On obtient $B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation $-x + y\sqrt{2} + z = 0$, dont une base est $((1,0,1),(1,\sqrt{2},-1))$. Comme B est symétrique, le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est l'orthogonal du plan vectoriel ci-dessus, donc la droite engendrée par $(1, -\sqrt{2}, -1)$.

4. a) On cherche une fonction h de la forme $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} z_q\varphi_q$. La condition cherchée équivaut à

$$\forall p \in [\![1\,;n]\!], \qquad \sum_{q=1}^{n} z_q\varphi_q(\theta_p) = x_p$$

et puisque $\varphi_q(\theta_p) = \sin(pq\theta_1) = a_{p,q}$, cela s'écrit matriciellement :

$$A_n \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui équivaut donc, compte tenu de $A_n^{-1} = \dfrac{2}{n+1}A_n$, à

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{2}{n+1}A_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Il y a bien une solution unique.

b)
- Supposons $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\gamma_j = 0$. Alors, en prenant pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, la valeur en θ_i, on obtient $\lambda_i = 0$. Γ est donc une famille libre de n vecteurs de l'espace de dimension n E_n, donc est une base de E_n.
- Pour tout f de E_n, il existe $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j\gamma_j$. En prenant, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, la valeur en θ_i, on obtient $\lambda_i = f(\theta_i)$.
- En particulier, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(\theta_j)\gamma_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\gamma_j$$

  Donc la matrice de passage de Γ à $\mathcal{B}$ est A_n.

c)
- La linéarité de f est claire. Il faut montrer que E_n est stable par u. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $u(\varphi_i) \in E_n$, ce qui résulte de la relation

$$\sin\left(i\left(x + \frac{\pi}{n+1}\right)\right) + \sin\left(i\left(x - \frac{\pi}{n+1}\right)\right) = 2\sin(ix)\cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)$$

- On cherche la matrice de u dans la base Γ, c'est-à-dire les composantes des $u(\gamma_j)$ dans Γ. D'après b), ces composantes sont les $u(\gamma_j)(\theta_i)$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Alors

$$\begin{aligned} u(\gamma_j)(\theta_i) &= \gamma_j\left(\theta_i + \frac{\pi}{n+1}\right) + \gamma_j\left(\theta_i - \frac{\pi}{n+1}\right) \\ &= \gamma_j\left(\theta_{i+1}\right) + \gamma_j\left(\theta_{i-1}\right) \end{aligned}$$

Donc si $2 \leqslant j \leqslant n-1$, alors $u(\gamma_j)(\theta_i)$ vaut 1 si $j=i+1$ ou $j=i-1$, et 0 sinon.
Si $j=1$, $u(\gamma_1)(\theta_2)=1$, et $u(\gamma_1)(\theta_i)=0$ si $i>2$, et $u(\gamma_1)(\theta_1)=\gamma_1(\theta_2)+\gamma_1(0)$. Il suffit de remarquer que γ_1, combinaison linéaire de sinus, est nul en 0 pour conclure que $u(\gamma_1)(\theta_1)=0$.
De même, en remarquant que $\gamma_n(\pi)=0$, on obtient $u(\gamma_n)(\theta_i)=\delta_{i,n-1}$.
Finalement

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– Dans la base $\mathcal{B}$, on calcule $u(\varphi_i)$ qui, d'après la relation rappelée au début de cette question, vaut

$$2\cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\varphi_i = 2\cos\theta_i\varphi_i$$

Donc $F=\begin{pmatrix} 2\cos\theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2\cos\theta_n \end{pmatrix}$.

– Des formules de changement de base résulte alors que $F=A_n^{-1}GA_n$, soit $F=\dfrac{2}{n+1}A_nGA_n$. Donc

$$A_nGA_n=\frac{n+1}{2}F$$

Partie II

1. a) L'existence et l'unicité de h résulte de **I.4.a)**. sk

b) item g est évidemment 2π-périodique, continue, impaire, donc appartient à E.
Pour $F_1(g)$, on cherche une fonction φ de E_1, telle que $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. $\varphi=\sin$ convient. Comme il y a unicité, il en résulte $F_1(g)=\sin$.

– Pour $F_2(g)$, on cherche φ de E_2, telle que $\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\varphi\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. La fonction $\dfrac{3}{4}\sin$ convient et, toujours par unicité, $F_2(g)=\dfrac{3}{4}\sin$.

– Pour $F_3(g)$, on peut remarquer que g elle-même appartient à E_3. En effet, $\sin^3 t=\dfrac{3}{4}\sin t-\dfrac{1}{4}\sin 3t$. Donc $F_3(g)=g$.

2. – La linéarité de F_n ne pose pas de problème : si $f,g\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors

$$\forall p\in[\![1\,;n]\!],\ F_n(\lambda f+g)(\theta_p(n))=(\lambda f+g)(\theta_p(n))=\lambda f(\theta_p(n))+g(\theta_p(n))=(\lambda F_n(f)+F_n(g))(\theta_p(n))$$

et on conclut $F_n(\lambda f+g)=\lambda F_n(f)+F_n(g)$ par unicité.

– La restriction de F_n à E_n est l'identité de E_n. En effet, si $f\in E_n$, l'application f elle-même vérifie les conditions du **1.a)**.

3. a) D'après **I.4.a)**, on sait que

$$\begin{pmatrix} d_1^{(n)}(f) \\ \vdots \\ d_n^{(n)}(f) \end{pmatrix}=\frac{2}{n+1}A_n\begin{pmatrix} f(\theta_1(n)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(n)) \end{pmatrix}$$

ce qui est bien la relation demandée.

b) Explicitons

$$d_k^{(n)}(f)=\frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^{n} f\left(p\frac{\pi}{n+1}\right)\sin\left(p\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

On reconnaît le produit de $\dfrac{2}{\pi}$ par le terme de rang $n+1$ de la suite des sommes de Riemann de la fonction $t \mapsto f(t)\sin(kt)$ sur $[0,\pi]$. Cette fonction étant continue, la suite $d_k^{(n)}(f)$ tend vers

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$$

lorsque $n \to +\infty$.
f étant continue, 2π-périodique et impaire, ceci n'est autre que le coefficient de Fourier $b_k(f)$.

4. On a, en écrivant que f est somme de sa série de Fourier,

$$\begin{aligned}
d_k^{(n)}(f) &= \frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^{n} f(\theta_p(n))\sin(k\theta_p(n)) \\
&= \frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j(f)\sin(j\theta_p(n))\sin(k\theta_p(n))\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} b_j(f)\sin(j\theta_p(n))\sin(k\theta_p(n))\right) && \textit{une des sommes est finie, pas de problème d'interversion} \\
&= \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j(f)\left(\sum_{p=1}^{n}\sin(p\theta_j(n))\sin(p\theta_k(n))\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j(f)S_{j,k}
\end{aligned}$$

(notation de **I.2.c)**).

Or $S_{j,k}$ est nul, sauf si $j \equiv k \pmod{2n+2}$ ou $j \equiv -k \pmod{2n+2}$. Le premier cas se produit si j est de la forme $s(2n+2)+k$, avec $s \geqslant 0$ et le deuxième si j est de la forme $s(2n+2)-k$ avec $s \geqslant 1$ (les deux conditions sur s correspondant à $1 \leqslant j$). Dans ces cas, $S_{j,k}$ vaut respectivement $\dfrac{n+1}{2}$ et $-\dfrac{n+1}{2}$.
Ceci conduit bien à l'expression de $d_k^{(n)}$ demandée.

5. a) On a déjà rappelé que $g(t) = \dfrac{3}{4}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 3t$. En utilisant la question **I.1)**, on en déduit sans calculs que

$$b_1(g) = \frac{3}{4}, b_3(g) = -\frac{1}{4} \text{ et } b_i(g) = 0 \text{ si } i \notin \{1,3\}$$

Comme $g(t) = \dfrac{3}{4}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 3t$, g est bien somme de sa « série » de Fourier, qui est ici une somme finie !

b) Du calcul sans intérêt ni difficulté particulière.

Partie III

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto \dfrac{\sin t}{\operatorname{ch} y - \cos t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Si y tend vers $+\infty$ et si $\sin t \neq 0$, $\dfrac{\sin t}{\operatorname{ch} y - \cos t} \sim 2\sin t\,\mathrm{e}^{-y}$, et $y \mapsto \mathrm{e}^{-y}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de référence). D'où l'existence de $f(t)$.

2. On écrit d'abord $L(z) = \dfrac{z^2-1}{(z-\mathrm{e}^{y})(z-\mathrm{e}^{-y})}$ puis on obtient, par les méthodes habituelles (attention à ne pas oublier la partie entière),

$$L(z) = 1 + \frac{\mathrm{e}^{y}}{z-\mathrm{e}^{y}} + \frac{\mathrm{e}^{-y}}{z-\mathrm{e}^{-y}}$$

On peut écrire

$$L(\mathrm{e}^{it}) = \frac{\mathrm{e}^{2it}-1}{\mathrm{e}^{2it}-2\mathrm{e}^{it}\operatorname{ch} y+1} = \frac{2i\sin t}{2\cos t - 2\operatorname{ch} y}$$

(on a mis e^{it} en facteur au numérateur et au dénominateur).

Donc $h(y) = iL(\mathrm{e}^{it}) = i\left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{y}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-y}}\right)$.

Ensuite, on écrit $\dfrac{\mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{y}} = -\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{it}}$. Et comme $|\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{it}| < 1$, on en déduit

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{y}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ny}\mathrm{e}^{int} = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-ny}\mathrm{e}^{int}$$

De même

$$\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-y}} = \mathrm{e}^{-it}\mathrm{e}^{-y}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ny}\mathrm{e}^{-int} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)y}\mathrm{e}^{-i(n+1)t}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} h(y) &= i\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ny}\mathrm{e}^{-int} - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ny}\mathrm{e}^{int}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2\sin(nt)\mathrm{e}^{-ny} \end{aligned}$$

3. On a $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2\sin(nt)\mathrm{e}^{-ny}\right)dy$. Posons, pour $n \geqslant 1$, $f_n(y) = 2\sin(nt)\mathrm{e}^{-ny}$. Ce sont des fonctions clairement continues et intégrables sur $[1, +\infty[$. De plus

$$\int_1^{+\infty} |f_n(y)| dy \leqslant 2\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-ny} dy = 2\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n},$$

terme général d'une série convergente. Donc la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge et, f étant continue, on peut échanger intégration et somme, donc

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(y)\, dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\mathrm{e}^{-n}}{n} \sin(nt)$$

De plus $\left|\dfrac{2\mathrm{e}^{-n}}{n}\sin(nt)\right| \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{-n}}{n}$, terme général d'une série convergente. La série de fonctions précédente est donc normalement, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

4. f est bien 2π-périodique et impaire. De plus, elle est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues, donc elle est continue. Déterminons sa série de Fourier. Comme f est impaire, $a_k(f) = 0$. Puis

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\sin(nt)\sin(kt)\right) dt$$

De même que ci-dessus, la série de fonctions de terme général $2\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\sin(nt)\sin(kt)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On intègre sur un segment, donc on peut intégrer terme à terme :

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi} 2\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\sin(nt)\sin(kt)\, dt$$

ce qui, d'après **I.1)**, vaut $2\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$.
Ceci nous donne les coefficients de Fourier et le fait que f est développable en série de Fourier.
L'inégalité $|b_j(f)| \leqslant 2\mathrm{e}^{-j}$ est claire.

5. a) $S_n \in E_n$, donc $F_n(S_n) = S_n$.

b) D'après **4)**, on a, pour tout t de $\mathbb{R}$,

$$|R_n(t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |b_k(f)| \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = 2\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}} < 4\mathrm{e}^{-(n+1)}$$

la dernière inégalité parce que $e > 2$, donc $1 - \mathrm{e}^{-1} > \dfrac{1}{2}$.

c) Selon le même raisonnement qu'au **III.4)** (convergence uniforme de la série), on voit que les coefficients de Fourier de R_n sont

$$b_k(R_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leqslant n \\ b_k(f) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application de **II.4)** donne alors

$$r_k^{(n)} = 0 + \sum_{s=1}^{+\infty} [b_{k+(2n+2)s}(f) - b_{-k+(2n+2)s}(f)]$$

Donc

$$\begin{aligned} |r_k^{(n)}| &\leqslant \sum_{s=1}^{+\infty} [|b_{k+(2n+2)s}(f)| + |b_{-k+(2n+2)s}(f)|] \\ &\leqslant 2 \sum_{s=1}^{+\infty} [\mathrm{e}^{-k-(2n+2)s} + \mathrm{e}^{k-(2n+2)s}] \\ &\leqslant 4 \operatorname{ch} k \sum_{s=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2n+2)s} \leqslant 4 \operatorname{ch} k \frac{\mathrm{e}^{-(2n+2)}}{1 - \mathrm{e}^{-(2n+2)}} \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^{-(2n+2)} \leqslant \dfrac{1}{e} \leqslant \dfrac{1}{2}$, et on conclut bien

$$|r_k^{(n)}| \leqslant 8 \operatorname{ch} k \mathrm{e}^{-(2n+2)}$$

6. On a $F_n(f) = F_n(S_n) + F_n(R_n) = S_n + F_n(R_n)$. Donc, pour $t \in \mathbb{R}$, on peut majorer

$$|F_n(f)(t) - f(t)| = |-R_n(t) + F_n(R_n)(t)| \leqslant \|R_n\|_\infty + |F_n(R_n)(t)| \leqslant 4\mathrm{e}^{-(n+1)} + |F_n(R_n)(t)|$$

Or $|F_n(R_n)(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |r_k^{(n)}| \leqslant 8 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch} k \, \mathrm{e}^{-(2n+2)}$.

En écrivant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch} k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k = \frac{\mathrm{e}^n - 1}{e - 1} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$, on majore uniformément $|F_n(R_n)(t)|$ par une suite tendant vers 0. De tout ceci résulte finalement que $F_n(f)$ converge bien vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.