PROBLÉME I (extrait de ESSEC 1990)

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définies respectivement par :

- $u_0 = 1$ et $u_n = \dfrac{3.5.7\dots(2n+1)}{2.4.6\dots(2n)} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}$ pour $n \geqslant 1$.
- $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Étudier le sens de variation de la suite (J_n) et prouver sa convergence.

b) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} pour $n \geqslant 2$.

c) Calculer J_0 et J_1. En déduire les valeurs de J_{2n} et de J_{2n+1} en fonction de u_n.

2. a) Déduire successivement des résultats précédents les inégalités :

$$(1) \qquad 1 \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{u_n^2}{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2n}$$

$$(2) \qquad 0 \leqslant u_n - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \leqslant \frac{u_n}{2n+1}$$

b) Déduire de (1) un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

<u>*Dans toute la suite, x désigne un réel appartenant à l'intervalle $[0,1[$.*</u>

3. Justifier l'existence et calculer l'intégrale suivante :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos^2 t}$$

(on pourra poser $\tan(t) = \sqrt{1-x}\,\tan(u)$).

4. a) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} J_{2k} x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos^2 t} - x^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

b) Établir l'inégalité :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{J_{2n+2}}{1-x}$$

c) En déduire que :

$$\forall x \in [0,1[\ , \ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{2n+1}$$

5. a) Établir par récurrence que : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1}$.

b) En utilisant un produit de Cauchy de deux séries, établir que :

$$\forall x \in [0,1[\ , \ \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

6. En utilisant les inégalités (2), établir :

a) la convergence de la série :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$$

b) la double inégalité :

$$x \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1-x)^{\frac{3}{2}} S(x) \leqslant 1$$

En déduire alors un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

PROBLÉME II (extrait de ESSEC 1986)

Questions préliminaires

1. Soit x un réel strictement positif. Calculer :

$$I_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$$

(*on pourra poser* $t = \dfrac{1}{x}\tan u$).

2. a) Soit $x \in]0,1[$. Calculer, à l'aide d'un changement de variable bien choisi :

$$I_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$$

b) En déduire que, lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$I_2(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$$

Ces deux intégrales interviennent dans les questions qui suivent.

Partie I

L'objet de cette partie est l'étude de l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} \end{array} \right.$$

1. a) Calculer $f(1)$.

b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est indépendant de x (on pourra poser $u = \dfrac{\pi}{2} - v$ dans l'intégrale donnant $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$).

2. a) Montrer que, pour $0 \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{2}$: $u \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin u$.

b) En déduire une majoration de $f(x)$ pour $x < 1$, puis les valeurs de $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x\cos^2 u + \sin^2 u}$$

x désignant un réel strictement positif, h un réel tel que $0 < |h| < \dfrac{x}{2}$, on pose $A = x\cos^2 u + \sin^2 u$ et $B = h\cos^2 u$.

En remarquant que $\dfrac{1}{A+B} = \dfrac{1}{A} - \dfrac{B}{A^2} + \dfrac{B^2}{A^2(A+B)}$, démontrer que :

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2} \right| \leqslant |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3}$$

et en déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0\ ,\ f'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u$$

c) Calculer la dérivée de la fonction ψ telle que $\psi(u) = \dfrac{\sin u \cos u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$.

En déduire que $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(u)\,\mathrm{d}u$.

d) Calculer $f'(1)$ puis $f'(x)$ pour $x \neq 1$ en utilisant une primitive de ψ. f' est-elle continue en 1 ?

4. a) Démontrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
On notera encore g la fonction ainsi prolongée.

b) Démontrer que :

$$\forall x > 0 \ , \ f(x) + x \ln x - x = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie II : Application à des calculs de séries.

1. a) Déduire de la question I.4.b :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ f(1) = 1 - \sum_{p=1}^{n} \int_0^1 t^{2p} \ln t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{2n} g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{2p} \ln t\,\mathrm{d}t$.

c) Démontrer l'existence d'une constante K telle que

$$0 \leqslant \int_0^1 t^{2n} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{2n+1}$$

d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et donner la valeur de sa somme.

e) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. a) Démontrer la formule :

$$\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2} \quad (1)$$

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $s_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$ et $r_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$.

Démontrer que

$$\frac{1}{6(p+2)^3} \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{6p^3}$$

Donner l'ordre de grandeur de la valeur de p à utiliser pour obtenir à l'aide de s_p une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près.