PROBLÉME I (extrait de ESSEC 1990)

1. *Les J_n sont les célèbres intégrales de Wallis. Une grande partie du calcul qui suit a déjà été faite en classe !...*

a) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$.

Par positivité de l'intégrale de fonctions continues, on en déduit immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante minorée : elle converge.}}$$

b) La fonction cos étant de classe $\mathscr{C}^1$, on peut intégrer par parties, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{n-1} t}_{u(t)} . \underbrace{\cos t}_{v'(t)} \,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\Big[\cos^{n-1} t . \sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0 \text{ car } n\geqslant 2} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t \sin^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t (1 - \cos^2 t) \,\mathrm{d}t = (n-1)(J_{n-2} - J_n) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2\ ,\ J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}\,.}$$

c)
- On a immédiatement $\boxed{J_0 = \dfrac{\pi}{2} \text{ et } J_1 = 1.}$
- La relation $J_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} J_{2n-2}$ pour $n \geqslant 1$ donne facilement par récurrence :

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ J_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} J_0 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

d'où

$$\boxed{J_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{u_n}{2n+1}}$$

cette relation étant encore valable pour $n = 0$.

- La relation $J_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} J_{2n-1}$ pour $n \geqslant 1$ donne facilement par récurrence :

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ J_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} J_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

d'où

$$\boxed{J_{2n+1} = \frac{1}{u_n}}$$

cette relation étant encore valable pour $n = 0$.

2. a)
- La suite (J_n) étant décroissante, on a, pour tout $n \geqslant 1$, $J_{2n+1} \leqslant J_{2n} \leqslant J_{2n-1} = \dfrac{2n+1}{2n} J_{2n+1}$, d'où, en remplaçant par les relations précédentes :

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{u_n}{2n+1} \leqslant \frac{1}{u_n} \frac{2n+1}{2n}$$

ce qui donne bien, les u_n étant positifs :

$$\boxed{(1) \qquad 1 \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{u_n^2}{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2n} \quad \text{pour } n \geqslant 1\,.}$$

- Les inégalités (2) de l'énoncé sont équivalentes à

$$u_n\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \leqslant u_n$$

soit encore à

$$\frac{2n}{2n+1}u_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \leqslant u_n\,.$$

Il est facile de vérifier qu'elle découlent immédiatement des inégalités (1) pour $n \geqslant 1$ (et elles restent vraies pour $n = 0$).

b) Les inégalités (1) impliquent, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{u_n^2}{2n+1} = 1$$

donc, par définition : $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2(2n+1)}{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4n}{\pi}$, et, u_n étant positif, on en tire :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,.}$$

3. • Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 t \in [0,1]$ donc $x\cos^2 t \in [0,x]$. Puisque $0 \leqslant x < 1$ d'après l'énoncé, $1 - x\cos^2 t$ ne s'annule pas pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après les théorèmes usuels, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 - x\cos^2 t}$ est donc continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui justifie $\boxed{\text{l'existence de l'intégrale } f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos^2 t}.}$

• L'application $t \mapsto \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{\tan t}{\sqrt{1-x}}\right)$ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: en effet, elle est strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de telles fonctions, vaut 0 quand $t = 0$ et tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand t tend vers $\frac{\pi}{2}^-$.

On peut donc effectuer le changement de variable $u = \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{\tan t}{\sqrt{1-x}}\right)$ soit $\tan(t) = \sqrt{1-x}\,\tan(u)$ pour $t, u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Cela conduit à :

$$1 - x\cos^2 t = 1 - \frac{x}{1+\tan^2 t} = 1 - \frac{x}{1 + (1-x)\tan^2 u} = \frac{(1-x)(1+\tan^2 u)}{1+\tan^2 t}$$

et

$$(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{1-x}(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos^2 t} = \frac{(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 t)(1 - x\cos^2 t)} = \frac{\sqrt{1-x}(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u}{(1-x)(1+\tan^2 u)} = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-x}}$$

et finalement

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}\,.}$$

4. a) On a :

$$\sum_{k=0}^{n} J_{2k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t\,\mathrm{d}t\right)x^k = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos^2 t)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}(x\cos^2 t)^k\right)\mathrm{d}t\,.$$

On peut en effet intervertir $\sum$ et $\int$ puisqu'il s'agit d'une somme finie.

Or $\sum_{k=0}^{n}(x\cos^2 t)^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $x\cos^2 t \neq 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} J_{2k}x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(x\cos^2 t)^{n+1}}{1-x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} J_{2k}x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos^2 t} - x^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2} t}{1-x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\,.}$$

b) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $1 - x\cos^2 t \geqslant 1 - x > 0$ donc $0 < \dfrac{1}{1-x\cos^2 t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ puis $0 \leqslant \dfrac{\cos^{2n+2} t}{1-x\cos^2 t} \leqslant \dfrac{\cos^{2n+2} t}{1-x}$ ce qui donne par positivité de l'intégrale :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2} t}{1-x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{J_{2n+2}}{1-x}\,.}$$

c) On a donc

$$0 \leqslant x^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2} t}{1-x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{J_{2n+2}}{1-x}x^{n+1}\,.$$

Puisque la suite (J_{2n+2}) converge d'après 1.a et que $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{J_{2n+2}}{1-x}x^{n+1} = 0$ et il résulte du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2} t}{1-x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 0$.

La relation trouvée en 4.a implique alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} J_{2k}x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos^2 t}$$

c'est-à-dire que la série de terme général $J_{2k}x^k$ converge et l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} J_{2k}x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}\,.$$

Puisque $\dfrac{2}{\pi}J_{2k} = \dfrac{u_k}{2k+1}$, on obtient bien

$$\boxed{\forall x \in [0,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k x^k}{2k+1}\,.}$$

5. a) Montrons par récurrence sur n que : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1}$.

- La relation est trivialement vraie pour $n = 0$.
- Au rang n, supposons établie l'égalité $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1}$. Alors

$$u_{n+1} \underset{\text{par déf.}}{=} \frac{2n+3}{2n+2}u_n = u_n + \frac{u_n}{2n+2} = u_n + \frac{u_{n+1}}{2n+3} = \sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{2k+1} + \frac{u_{n+1}}{2n+3} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{u_k}{2k+1}$$

ce qui établit l'égalité au rang $n+1$ et achève la récurrence.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $y_n = \dfrac{u_n}{2n+1}x^n$ et $z_n = x^n$. Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} y_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n$ sont absolument convergentes (car convergentes et à termes positifs !) et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{(d'après 4.b)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \frac{1}{1-x} \quad \text{(série géométrique).}$$

Leur série produit de Cauchy est la série de terme général w_n avec :

$$\forall n \geqslant 0 \ , \ w_n = \sum_{k=0}^{n} y_k z_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1} x^k x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1} \right) x^n = u_n x^n$$

d'après la formule vue en cours, puis en utilisant le résultat de la question 5.a.

On sait, toujours d'après le cours, que la série de terme général w_n est (absolument) convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n \right)$$

ce qui donne

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} . \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} .}$$

6. a) D'après les inégalités (2), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \sqrt{n}x^n \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} u_n x^n$.

Puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est convergente, il résulte des théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs que : $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{n} x^n \text{ converge.}}$

Rem : la convergence de cette série pouvait aussi se démontrer à l'aide de la règle de d'Alembert.

b) D'après les inégalités (2) on a, pour tout entier n :

$$\frac{2n}{2n+1} u_n x^n \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} x^n \leqslant u_n x^n .$$

En sommant ces inégalités, ce qui est possible car toutes les séries écrites convergent, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{2n+1} u_n x^n \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n .$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{2n+1} u_n x^n \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} S(x) \leqslant \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \quad (3).$$

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{2n+1} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2n+1} x^n,$$

cette écriture étant licite car les deux séries convergent, d'où, en utilisant les résultats des questions 4.c et 5.b :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{2n+1} u_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1-x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

puis en reportant dans (3) :

$$\frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} S(x) \leqslant \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{x \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1-x)^{\frac{3}{2}} S(x) \leqslant 1\,.}$$

On en déduit immédiatement : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}(1-x)^{\frac{3}{2}} S(x) = 1$ donc

$$\boxed{S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}\,.}$$

PROBLÉME II (extrait de ESSEC 1986)

Questions préliminaires

1. • On pouvait déjà remarquer, bien que cela ne fût pas demandé par l'énoncé, que les intégrales proposées existent bien.

En effet, puisque x est un réel strictement positif, on aura $x\cos^2 u + \sin^2 u$ strictement positif pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ est donc continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui justifie l'existence de $I_1(x)$.

• x étant un réel strictement positif, l'application $u \mapsto \dfrac{1}{x}\tan u$ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}\tan u$ conduit donc à une intégrale impropre convergente.

Pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u}.\frac{1}{x^2 + \tan^2 u} = \mathrm{d}(\tan u).\frac{1}{x^2 + \tan^2 u}$$

et puisque $\tan u = xt$ on obtient

$$I_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{x^2 + x^2t^2} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{x}\big[\operatorname{Arc}\tan t\big]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2x}\,.}$$

2. a) Le changement de variable à utiliser ici peut être trouvé à l'aide des règles de Bioche, mais, compte tenu du terme « $\sin u\,\mathrm{d}u$ », il semble assez évident : on posera $v = \cos u$.

Il s'agit d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur lui-même et l'on a, pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{-\,\mathrm{d}v}{(x^2-1)\cos^2 u + 1} = \frac{-\,\mathrm{d}v}{1-(1-x^2)v^2}$$

On aura donc

$$I_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{1-(1-x^2)v^2}\,.$$

L'énoncé suppose ici $x \in]0,1[$. On peut donc effectuer dans l'intégrale précédente le changement de variable $w = \sqrt{1-x^2}.v$ qui conduit à

$$I_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}w}{1-w^2}\,.$$

Or $\dfrac{1}{1-w^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-w} + \dfrac{1}{1+w}\right)$ d'où

$$I_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left[\ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)\,.}$$

b) Lorsque x tend vers 0^+, on a déjà : $I_2(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Puisque $\sqrt{1-x^2} \underset{0^+}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a $1-\sqrt{1-x^2} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ d'où $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{4}{x^2}$ puis $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \underset{0^+}{\sim} \ln\left(\dfrac{4}{x^2}\right)$.

Mais $\ln\left(\dfrac{4}{x^2}\right) = \ln 4 - 2\ln x \underset{0^+}{\sim} -2\ln x$ et on trouve bien

$$\boxed{I_2(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x\,.}$$

Partie I

On étudie ici l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} \end{array} \right.$$

1. a) De façon immédiate : $\boxed{f(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{8}\,.}$

b) Soit $x > 0$. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{\frac{1}{x^2}\cos^2 u + \sin^2 u} = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{\cos^2 u + x^2 \sin^2 u}$.

En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - v$ dans cette intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - v}{\sin^2 v + x^2\cos^2 v}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{\pi}{2}x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}v}{\sin^2 v + x^2\cos^2 v} - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v\,\mathrm{d}v}{\sin^2 v + x^2\cos^2 v} \\ &= \frac{\pi}{2}xI_1(x) - f(x) \end{aligned}$$

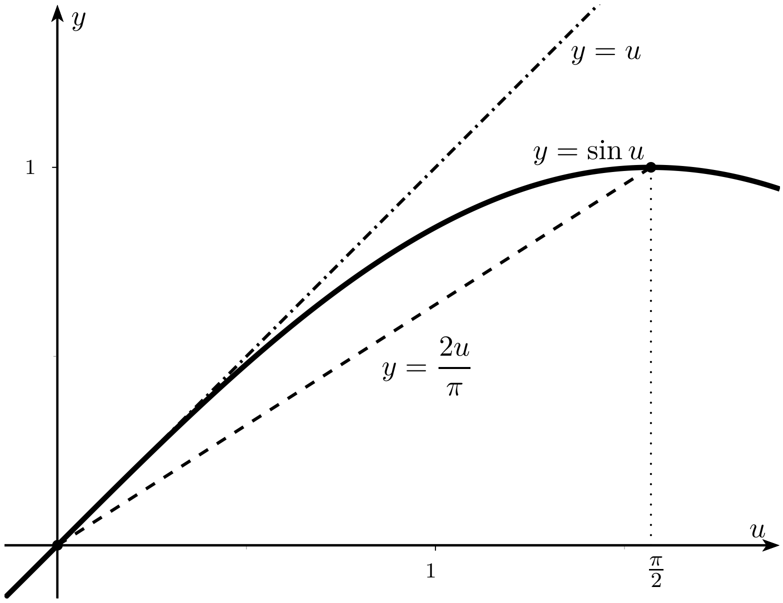
donc, puisque $I_1(x) = \dfrac{\pi}{2x}$, on obtient

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}\,.}$$

2. a) L'inégalité $u \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin u$ pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ peut bien sûr se démontrer en étudiant rapidement la fonction $u \mapsto u - \dfrac{\pi}{2}\sin u$. Mais il y a plus astucieux :

En effet, la fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (car par exemple sa dérivée seconde y est négative). Sa courbe représentative est donc située au-dessus de ses cordes, en particulier de celle qui joint les points de coordonnées $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. L'équation de cette corde étant $y = \dfrac{2u}{\pi}$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall u \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\ ,\ \sin u \geqslant \frac{2u}{\pi}\,.}$$



Le même argument de convexité peut servir pour démontrer l'inégalité bien connue :

$$\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \sin u \leqslant u$$

en utilisant ici le fait que la courbe est située en dessous de sa tangente en O.

b) • En utilisant la majoration précédente on obtient, pour $x > 0$:

$$0 \leqslant f(x) = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \, \mathrm{d}u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} \leqslant \frac{\pi}{2} x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \, \mathrm{d}u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\pi}{2} x I_2(x) \, .$$

• On a vu que $I_2(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x I_2(x) = 0$ et il résulte de l'encadrement ci-dessus que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \, .}$$

• Puisque $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$ pour tout $x > 0$, il en découle ensuite :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4} \, .}$$

3. a) En utilisant les notations de l'énoncé, on a

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{A+B} - \frac{1}{A} \right) u \, \mathrm{d}u$$

puis

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos^2 u \, \mathrm{d}u}{(x \cos^2 u + \sin^2 u)^2} = \frac{1}{h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{A+B} - \frac{1}{A} + \frac{B}{A^2} \right) u \, \mathrm{d}u$$

donc, compte tenu de la relation donnée par l'énoncé (et qu'il est facile de vérifier), on obtient

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos^2 u \, \mathrm{d}u}{(x \cos^2 u + \sin^2 u)^2} = \frac{1}{h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{B^2}{A^2(A+B)} u \, \mathrm{d}u = h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos^4 u}{A^2(A+B)} \, \mathrm{d}u \, .$$

D'autre part, pour $x > 0$ et $h \in \left[-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right]$, on a

$$A^2(A+B) = (x \cos^2 u + \sin^2 u)^2 \big((x+h) \cos^2 u + \sin^2 u\big) \geqslant (\frac{x}{2} \cos^2 u + \sin^2 u)^3 > 0$$

donc on aura bien

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\right|\leqslant |h|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u)^3}$$

L'intégrale figurant dans le membre droit de cette inégalité ne dépendant pas de h, on aura, pour $x>0$ fixé, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(|h|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u)^3}\right)=0$ donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x>0\ ,\ \varphi'(x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,.}$$

b) Pour tout $x>0$, $f(x)=x\varphi(x^2)$ donc f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=2x^2\varphi'(x^2)+\varphi(x^2)$. Compte tenu du résultat précédent, un calcul rapide donne alors

$$\boxed{\forall x>0\ ,\ f'(x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u(x^2\cos^2 u-\sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u\,.}$$

c) La fonction $\psi : u\mapsto \dfrac{\sin u\cos u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$ est évidemment dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\begin{aligned}\psi'(u)&=\frac{(\cos^2 u-\sin^2 u)(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)-\sin u\cos u(2\sin u\cos u(1-x^2))}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\\&=\frac{x^2\cos^2 u(\cos^2 u+\sin^2 u)+\sin^2 u(-\cos^2 u-\sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\\&=\frac{x^2\cos^2 u-\sin^2 u}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,.\end{aligned}$$

On a donc, compte tenu du résultat de la question précédente et à l'aide d'une intégration par parties :

$$f'(x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\psi'(u)\,\mathrm{d}u=\underbrace{\big[-u\psi(u)\big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

d) • Pour $x=1$, le calcul précédent donne

$$f'(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\cos u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2u)\,\mathrm{d}u=\left[-\frac{1}{4}\cos(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

• Pour $x\neq 1$, puisque $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)=2(1-x^2)\sin u\cos u$, on a facilement une primitive de $\psi(u)$ et on obtient

$$f'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\cos u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}=\left[\frac{1}{2(1-x^2)}\ln(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\ln x}{x^2-1}\,.$$

• On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\x\neq 1}}f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}=f'(1)$$

et par suite f' est continue en 1.

4. a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ d'après les théorèmes usuels.

De plus, $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 0$ d'après les croissances comparées des fonctions usuelles, et $\lim\limits_{t \to 1} g(t) = \dfrac{1}{2}$ d'après le calcul précédent, donc g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) + x\ln x - x) = f'(x) + \ln x = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} + \ln x = g(x)$, l'égalité étant encore vraie pour $x = 1$ d'après ce qui précède.

On a vu à la question a fonction 2.b que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ donc la fonction $x \mapsto f(x) + x\ln x - x$ se prolonge par continuité en 0 (et sa valeur en 0 est 0). Étant alors continue sur $[0, +\infty[$, il s'agit donc de la primitive de g qui s'annule en 0, c'est à dire :

$$\boxed{\forall x > 0 \ , \ f(x) + x\ln x - x = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$$

cette égalité se prolongeant d'ailleurs en 0.

Partie II : Application à des calculs de séries.

1. a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1[$:

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2} + \frac{t^{2n}}{1 - t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} + \frac{t^{2n}}{1 - t^2}$$

d'où, pour $t \in]0, 1[$

$$g(t) = -\frac{t^2 \ln t}{1 - t^2} = -\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k+2} \ln t + t^{2n} g(t) = -\sum_{p=1}^{n} t^{2p} \ln t + t^{2n} g(t)$$

cette égalité se prolongeant sans difficulté en 0 et en 1.

Or, d'après la question I.4.b, $f(1) - 1 = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ donc on obtient

$$f(1) - 1 = \int_0^1 \left(-\sum_{p=1}^{n} t^{2p} \ln t + t^{2n} g(t) \right) = -\sum_{p=1}^{n} \int_0^1 t^{2p} \ln t \,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{2n} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ f(1) = 1 - \sum_{p=1}^{n} \int_0^1 t^{2p} \ln t \,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{2n} g(t)\,\mathrm{d}t\,.}$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto t^{2p} \ln t$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{2p} \ln t \,\mathrm{d}t$ existe.

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_0^1 \underbrace{t^{2p}}_{u'(t)} \underbrace{\ln t}_{v(t)} \,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t^{2p+1}}{2p+1} \ln t \right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{2p+1} \int_0^1 t^{2p}\,\mathrm{d}t = \boxed{-\frac{1}{(2p+1)^2}\,.}$$

c) La fonction g étant continue (une fois prolongée) sur le segment $[0, 1]$ y est bornée. De plus elle est à valeurs positives sur cet intervalle donc il existe une constante K telle que

$$\forall t \in [0, 1] \ , \ 0 \leqslant g(t) \leqslant K\,.$$

On aura alors

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 t^{2n} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant K \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{2n+1}\,.}$$

d) La relation obtenue à la question II.1.a s'écrit, compte tenu de $f(1) = \dfrac{\pi^2}{8}$ et du calcul fait à la question II.1.b :

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} + \int_0^1 t^{2n} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} + \int_0^1 t^{2n} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or l'encadrement trouvé à la question II.1.c donne, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 t^{2n} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge et que :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.}$$

e) On sait déjà (cours) que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. On peut alors écrire, en séparant les termes pairs et impairs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

d'où $\displaystyle\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.}$$

2. a) La méthode pour calculer la somme d'une série dont le terme général est une fraction rationnelle de n est classique : elle consiste à faire une décomposition en éléments simples.

Ici on trouve (calculs non reproduits), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{4}{(2n+1)^2}\,.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ étant convergente (série télescopique), on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 - 4\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}\,.}$$

b) Là encore, la méthode est classique et a déjà été vue. Elle consiste à faire une comparaison série-intégrale.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On aura donc, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où en sommant de $p+1$ à l'infini (ce qui est possible car l'intégrale et les séries écrites convergent) :

$$2\int_{p+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant r_p \leqslant 2\int_{p}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, pour $x > 0$, $x(x+1)(2x+1)^2 \geqslant 4x^4$ (car $x+1 \geqslant x$ et $2x+1 \geqslant 2x$) et $x(x+1)(2x+1)^2 \leqslant 4(x+1)^4$ (car $x \leqslant x+1$ et $2x+1 \leqslant 2(x+1)$) donc

$$\int_{p+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2(x+1)^4} \leqslant r_p \leqslant \int_{p}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^4}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\frac{1}{6(p+2)^3} \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{6p^3}\,.}$$

Pour que s_p permette d'obtenir une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près, il suffit donc de choisir p de façon que $\dfrac{1}{6p^3} \leqslant 10^{-6}$ soit $-\ln(6p^3) \leqslant -6\ln 10$ ou $p \geqslant \mathrm{e}^{2\ln 10 - \frac{\ln 6}{3}}$ et on trouve $\boxed{p \geqslant 56\,.}$