PROBLÉME III (extrait de X-ENS MP 2011)

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. On considère l'endomorphisme Δ de E qui à toute suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite de terme général $(\Delta u)_n = u_{n+1}-u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On pose, pour k et n dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $n\geqslant k$. On convient que $0!=1$ et que $\displaystyle\binom{n}{k}=0$ si $k>n$.

Les candidats vérifieront la convergence des séries qu'ils rencontrent, même si cela n'est pas explicitement demandé.

Première partie : suites complètement monotones.

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on note Δ^p le p-ième itéré de Δ, défini par $\Delta^p=\Delta\circ\Delta^{p-1}$ pour $p\geqslant 1$, et par $\Delta^0=\mathrm{Id}_E$.

On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *complètement monotone* si pour tous entiers naturels p et n on a

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n > 0.$$

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles et indéfiniment dérivable. On considère la suite de terme général $u_n=f(n)$.

a) Montrer que, pour tout entier $p\geqslant 1$ et tout entier n, il existe un réel x dans l'intervalle $]n,n+p[$ tel que
$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x).$$
On pourra raisonner par récurrence en considérant la fonction $g : x\mapsto f(x+1)-f(x)$ et la suite de terme général $v_n=g(n)$.

b) On considère la suite de terme général $a_n=\dfrac{1}{n+1}$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

2. a) Démontrer que pour tout $p\geqslant 1$ on a :

$$(\Delta^p u)_n=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}u_{n+k}\,.$$

b) Soit $b\in]0,1[$. On considère la suite de terme général $b_n=b^n$. Calculer $(\Delta^p b)_n$ pour tous les entiers naturels n et p et en déduire que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

Soit ω une fonction continue et positive sur $[0,1]$, et non identiquement nulle. Jusqu'à la fin de la première partie, on considère la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\omega(t)\,\mathrm{d}t$.

3. a) Montrer que la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k=\int_0^1\frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\,.$$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

c) Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

d) En déduire que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0\,.$$

4. Déduire des questions précédentes que

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}\,.$$

5. On pose $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^k \omega(t)\,\mathrm{d}t\,.$

a) Montrer que

$$\varepsilon_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0\,.$$

b) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$. Montrer que $|S - \varepsilon_n| \leqslant \dfrac{S}{2^{n+1}}\,.$

Seconde partie : Transformée d'Euler.

Dans cette partie, on se donne une suite $(u_n)_{n:\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente, et on note S sa somme. **On ne suppose aucune autre propriété particulière de cette suite.** Le but est de démontrer que

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0\,.$$

On dit que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$ est la *transformée d'Euler* de la série $\sum(-1)^k u_k$.

6. a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\Delta^p u)_n = 0$.

b) Montrer que pour toute suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k = 0$.

7. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n\right)\,.$$

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n\right)\,.$$

8. a) On pose $E_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$. Montrer que

$$E_n - S = -\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\left(\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k u_k\right)\,.$$

b) Conclure.