PROBLÉME III (extrait de X-ENS MP 2011)

Première partie : suites complètement monotones.

1. a) Soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $(\mathcal{H}_p)$: "pour toute fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et tout entier naturel n, il existe $x \in]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)$."

- Soit f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$; d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $x \in]n, n+1[$ tel que $(\Delta u)_n = f(n+1) - f(n) = f'(x)$: $(\mathcal{H}_1)$ est donc vraie.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$; supposons $(\mathcal{H}_p)$ vérifiée et soit f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

  On considère alors $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x+1) - f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$, et la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = g(n)$, c'est-à-dire $v_n = (\Delta u)_n$.

  Alors g est indéfiniment dérivable, et en lui appliquant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_p)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in]n, n+p[$ tel que

  $$(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p v)_n = g^{(p)}(y) = f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y).$$

  On peut réappliquer l'égalité des accroissements finis à $f^{(p)}$ (indéfiniment dérivable), et il existe $x \in]y, y+1[\subset]n, n+p+1[$ tel que $f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y) = f^{(p+1)}(x)$. sk

  Ainsi $(\mathcal{H}_{p+1})$ est vérifiée, $\boxed{\text{ce qui démontre le résultat par récurrence sur } p.}$

b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est associée à la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ pour tout $x \geqslant 0$.

f est indéfiniment dérivable, et une récurrence triviale montre que $f^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En appliquant la question I.1.a, il vient :

$$\forall p \geqslant 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \exists x \in]n, n+p[\text{ tq } (\Delta^p a)_n = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}.$$

Il en résulte que $(-1)^p (\Delta^p a)_n = \dfrac{p!}{(x+1)^{p+1}} > 0$.

Comme de plus $(\Delta^0 a)_n = a_n > 0$, il en découle que

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est complètement monotone.}}$$

2. a) Il était ici possible de raisonner par récurrence sur p, en utilisant une méthode proche de celle de la démonstration de la formule du binôme et la formule du triangle de Pascal, mais il y a plus astucieux :

Notons $T : E \to E$ défini par : $\forall u \in E\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ (Tu)_n = u_{n+1}$. C'est un endomorphisme de E (facile), et $\Delta = T - \mathrm{Id}_E$. Comme T et Id_E commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton dans l'anneau $\mathscr{L}(E)$:

$$\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ \Delta^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} T^k.$$

En appliquant cette égalité à $u \in E$, on en tire, puisque $(T^k u)_n = u_{n+k}$:

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.}$$

Remarque : La formule précédente est vraie aussi pour $p = 0$; je ne vois pas pourquoi l'énoncé se limitait à $p \geqslant 1$...

b) La formule précédente donne : $\forall (p,n)\in\mathbb{N}^2, (-1)^p(\Delta^p b)_n=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}b^{n+k}=b^n(1-b)^p$ (en ré-appliquant la formule du binôme de Newton au développement de $(1-b)^p$). Comme $b\in]0,1[$, il s'ensuit que

$$\boxed{(b_n)\text{ est complètement monotone.}}$$

3. a) Soit $N\in\mathbb{N}$; on a :

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k u_k=\int_0^1\sum_{k=0}^{N}(-t)^k\omega(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{1+t}\omega(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

(somme partielle d'une série géométrique de raison $-t\neq 1$.)

Notons $R_N=\int_0^1\frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\omega(t)\,\mathrm{d}t$, et soit $M=\sup_{t\in[0,1]}|\omega(t)|$ (bien défini, puisque ω est continue sur le segment $[0,1]$). Comme pour tout $t\in[0,1]$, $\frac{1}{1+t}\leqslant 1$, il vient :

$$|R_N|\leqslant M\int_0^1 t^{N+1}\,\mathrm{d}t=\frac{M}{N+2}.$$

Il en résulte que $\lim_{N\to+\infty}R_N=0$, c'est dire que

$$\boxed{\text{la série numérique }\sum(-1)^k u_k\text{ converge, et }\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k=\int_0^1\frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.}$$

b) D'après la formule démontré en 2.a :

$$\forall (p,n)\in\mathbb{N}^2\ ,\ (-1)^p(\Delta^p u)_n=\int_0^1\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}t^{n+k}\omega(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^n(1-t)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t\mapsto t^n(1-t)^p\omega(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$; il en résulte que $(-1)^p(\Delta^p u)_n\geqslant 0$.

D'autre part, si cette quantité était nulle, alors $\forall t\in[0,1], t^n(1-t)^p\omega(t)=0$. En particulier, on aurait $\forall t\in]0,1[,\omega(t)=0$ et par continuité : $\forall t\in[0,1],\omega(t)=0$, ce qui est exclu par hypothèse.

Ainsi : $\forall (p,n)\in\mathbb{N}^2\ ,\ (-1)^p(\Delta^p u)_n>0$ et

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est complètement monotone.}}$$

c) Pour tout $t\in[0,1]$, on peut développer (puisque $0\leqslant\frac{1-t}{2}\leqslant\frac{1}{2}$) :

$$\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{1-t}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p.$$

Définissons donc, pour $p\in\mathbb{N}$: $f_p:[0,1]\to\mathbb{R}$ par : $\forall t\in[0,1], f_p(t)=\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)$. Chaque f_p est continue sur $[0,1]$, et on a de plus : $\forall t\in[0,1], |f_p(t)|\leqslant\frac{M}{2^p}$ (avec les notations du 3.a). Ainsi, la série de fonctions continues $\sum f_p$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$, et on peut intervertir $\sum$ et $\int$:

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{p=0}^{+\infty}f_p(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 f_p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Compte-tenu du 3.a, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,\mathrm{d}t.}$$

d) Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on obtient, en développant le binôme $(1-t)^p$ et d'après 2.a :

$$\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\int_0^1 t^k\omega(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^p}{2^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}u_k = \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_0.$$

D'où, d'après 3.c :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0.}$$

4. Appliquons ce qui précède à $\omega:[0,1]\to\mathbb{R}$, définie par : $\forall t\in[0,1], \omega(t)=1$ (qui vérifie bien les hypothèses du 3.) ; ici :

- $\displaystyle\int_0^1\frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2,$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1},$
- $\forall p\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)2^p}$ (effectuer le changement de variable $u=1-t$). sk

D'après 3.a et 3.c , il vient : $\boxed{\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)2^{p+1}}.}$

5. a) Les calculs faits au 3.d impliquent directement l'égalité demandée.

b) D'après ce qui précède (et, toujours, le 3d.), on a :

$$|S-\varepsilon_n| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0\right| = \left|\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Or on a vu que la série de fonctions continues $\sum f_p$ convergeait normalement sur $[0,1]$; il s'ensuit qu'on peut intervertir la série et l'intégrale, et, compte-tenu des calculs du 3.c :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+1}\frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Enfin, puisque $\omega\geqslant 0$ et comme $\forall t\in[0,1],\ 0\leqslant\dfrac{1-t}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$, on peut conclure :

$$\boxed{|S-\varepsilon_n|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1\frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{S}{2^{n+1}}.}$$

Seconde partie : Transformée d'Euler.

6. a) La série $\sum(-1)^n u_n$ converge, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+k} = 0$. Or, d'après 2.a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\Delta^p u)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$. D'où, p étant fixé,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = 0.}$$

b) *Cette question était déjà présente dans le DS n°2...*

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc est bornée : notons $R = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |r_n|$. Soit $\varepsilon > 0$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $|r_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Alors, pour tout $p \geqslant N_1$, comme $\dfrac{1}{2^p} \displaystyle\sum_{k=N_1}^{p} \binom{p}{k} \leqslant \dfrac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 1$:

$$\left| \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k \right| \leqslant \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} |r_k| \leqslant \frac{R}{2^p} \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} + \frac{1}{2^p} \sum_{k=N_1}^{p} \binom{p}{k} \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{R}{2^p} \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $\dbinom{p}{k} = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p^k}{k!}$, donc d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{2^p} \dbinom{p}{k} = 0$.

N_1 étant fixé, on a aussi $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{R}{2^p} \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} = 0$.

Ainsi, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N_2$, $\left| \dfrac{R}{2^p} \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, pour tout $p \geqslant \max(N_1, N_2)$, $\left| \dfrac{1}{2^p} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k \right| \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k = 0.}$$

7. a) Soit $N \in \mathbb{N}$; notons

$$S_N = \sum_{p=0}^{N} \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right].$$

Alors, par télescopage :

$$S_N = \frac{(-1)^0}{2^0} (\Delta^0 u)_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n = u_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n.$$

Le 2.a permet d'écrire

$$\frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n = \frac{(-1)^n}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} (-1)^{n+k} u_{n+k}.$$

Or on vient de voir au 6.a que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; le 6.b appliqué à la suite $((-1)^{n+k} u_{n+k})_{k\in\mathbb{N}}$ fournit alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = u_n$, c'est-à-dire que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right]$ converge, et

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right] = u_n.}$$

b) Notons, pour simplifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (\Delta^p u)_n$.

Soit $N \in \mathbb{N}$; notons également $U_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2w_n + (\Delta w)_n)$.

Comme $2w_n + (\Delta w)_n = w_{n+1} + w_n$, on a :

$$U_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n w_{n+1} + \sum_{n=0}^{N}(-1)^n w_n = \sum_{n=1}^{N+1}(-1)^{n-1}w_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^{n-1}w_n = (-1)^N w_{N+1} + w_0.$$

Or, p étant fixé, le 6.a montre que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc $\lim_{N\to+\infty} U_N = w_0 = (\Delta^p u)_0$. Il s'ensuit que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n)$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n) = (\Delta^p u)_0$$

soit encore, en multipliant cette égalité par $\dfrac{(-1)^p}{2^{p+1}}$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\right) = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0.}$$

8. a) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
E_n &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(u_k - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k\right) \qquad \text{(télescopage).}
\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k u_k$ converge, ce qui précède montre que la série $\sum_{k\geqslant 0}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k$ converge aussi, et, d'après 2.a :

$$\begin{aligned}
E_n - S &= -\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{n+1+k}(\Delta^{n+1}u)_k\\
&= -\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n+1}(-1)^{k+p}\binom{n+1}{p}u_{k+p}\\
&= -\frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k u_k.
\end{aligned}$$

b) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*, R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k$; en tant que reste d'une série convergente, on a : $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$. On peut alors appliquer le 6.b : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}R_p = 0$, d'où aussi $\lim_{n\to+\infty} E_n - S = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{S = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0.}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆