PROBLÈME I (extrait de CCP PC 2004)

Partie I

On considère la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$, où z est un nombre complexe et s un nombre réel donné.

1. Montrer que cette série converge pour tout z tel que $|z| < 1$.

2. *Dans toute cette question,* $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *désigne un nombre complexe de module 1.*

a) Étudiez la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ dans le cas où $s > 1$ ainsi que dans le cas où $s \leqslant 0$.

b) Dans le cas où $0 < s \leqslant 1$, étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ pour $z = 1$.

c) Toujours dans le cas où $0 < s \leqslant 1$, on suppose que $z \neq 1$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$.

i) Calculer S_n en fonction de n et de θ, puis montrer que $|S_n| \leqslant M(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $M(\theta) = \dfrac{1}{\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|}$.

ii) En écrivant z^k sous la forme $S_k - S_{k-1}$ pour tout nombre entier $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right] + S_n\, n^{-s}.$$

iii) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n \left[n^{-s} - (n+1)^{-s}\right]$ est convergente et en déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ est convergente.

Nous noterons dorénavant $\varphi(z,s)$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ pour tout couple $(z,s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ pour lequel cette série est convergente.

3. On note I l'intervalle ouvert $]-1,1[$ de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $(x,s) \in I \times \mathbb{R}$ on a $\varphi(x, s+1) = \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer $\varphi(x,0)$ et $\varphi(x,1)$ pour tout $x \in I$.

4. On suppose dans cette question que $s > 1$.

a) Soit f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(t) = e^{-nt}\, t^{s-1}$. Montrer que f_n est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de n, s et de l'intégrale $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Soit z un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n f_n(t)$ de fonctions de la variable réelle t est intégrable terme à terme sur $]0,+\infty[$.
En déduire que pour tout $s > 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$, on a

$$\varphi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Partie II

Dans cette partie, on notera g la fonction de la variable réelle x définie par :

$$(i) \quad g(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \text{ pour tout } x \in [0\,;2\pi[$$

$$(ii) \quad g \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

1. θ désigne ici un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$. On reprend les notations et les résultats de la question **I.2**, avec $s = 1$.

a) En écrivant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = S_k - S_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout entier n :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \cdot \frac{2}{n+1}$$

et en déduire que la convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}$ est uniforme sur tout segment inclus dans $]0, 2\pi[$.

b) En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t$, prouver que, pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \int_0^1 \frac{1 - t^N \mathrm{e}^{\mathrm{i}N\theta}}{1 - t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t$$

et en déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t\,.$$

c) Montrer que, pour $0 < \theta < \pi$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi - \theta}{2}$$

puis montrer que cette égalité reste valable pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$.

d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\theta}{n}$ puis l'égalité

$$\forall \theta \in [0, 2\pi]\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos n\theta}{n^2} = \frac{\theta}{2}\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\,.$$

e) En écrivant la relation précédente pour $\theta = \pi$, calculer la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

En déduire la relation

$$\forall \theta \in [0, 2\pi]\ ,\ \left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2}\,.$$

2. Soit θ un nombre réel. On note $R\varphi(\theta)$ la partie réelle de $\varphi(e^{i\theta}, 2)$ où φ est la fonction définie à la question **I.2**.

a) Exprimez $R\varphi(\theta)$ à l'aide de $g(\theta)$.

b) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t \cos\theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos\theta + 1}\, \mathrm{d}t = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}\,.$$

c) Déduire de ce qui précède la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1}\, \mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\, \mathrm{d}t$$

3. Soit s un nombre réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a les égalités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s(e^t \cos\theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos\theta + 1}\, \mathrm{d}t = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \cos n\theta,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s\, e^t \sin\theta}{e^{2t} - 2e^t \cos\theta + 1}\, \mathrm{d}t = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \sin n\theta.$$

b) En déduire des expressions des intégrales :

$$I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{ch} t}\, \mathrm{d}t, \qquad J(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{sh} t}\, \mathrm{d}t,$$

en fonction des sommes $S_1(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-(s+1)}$, $S_2(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-(s+1)}$ et de $\Gamma(s+1)$.
