PROBLÈME I (extrait de CCP PC 2004)

Partie I

1. Pour $z=0$, la série est évidemment convergente.

Sinon, on peut utiliser la règle de d'Alembert appliquée à la série des modules (qui est bien à termes strictement positifs) : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\dfrac{|(n+1)^{-s}z^{n+1}|}{|(n)^{-s}z^n|}=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-s}|z|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}|z|$, et puisque $|z|<1$, la série est absolument convergente, donc convergente.

2. a) Ici, $|n^{-s}z^n|=n^{-s}=\dfrac{1}{n^s}$, qui est le terme général d'une série de Riemann et, directement d'après le cours :

- si $s>1$, la série $\sum n^{-s}z^n$ est absolument convergente, donc convergente.

- si $s\leqslant 0$, la série $\sum n^{-s}z^n$ diverge grossièrement, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

b) Pour $0<s\leqslant 1$, la série $\sum n^{-s}$ est une série de Riemann qui diverge (cours).

c) i) S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq 1$ donc d'après les formules du cours :

$$S_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=e^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{-2\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/2}}{-2\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}=\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2}$$

donc $|S_n|=\dfrac{\left|\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}\leqslant\dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$.

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{-s}z^k=\sum_{k=1}^{n}k^{-s}(S_k-S_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}k^{-s}S_k-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{-s}S_k=\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^{-s}-(k+1)^{-s}\right)S_k+n^{-s}S_n$,

car $S_0=0$ (cette manipulation sur les sommes s'appelle une *transformation d'Abel*).

iii) • Posons $a_k=\left(k^{-s}-(k+1)^{-s}\right)S_k$. D'après ce qui précède, $|a_k|\leqslant\dfrac{k^{-s}-(k+1)^{-s}}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$.

Par sommation et télescopage, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant\frac{1-(n+1)^{-s}}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}\leqslant\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$.

Ainsi les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum|a_k|$ sont majorées ; cette série est donc convergente, c'est-à-dire que la série $\sum a_k$ est absolument convergente, donc convergente.

• On a vu plus haut que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{-s}z^k=\sum_{k=1}^{n-1}a_k+n^{-s}S_n$. On vient de montrer que la somme du membre de droite converge, et le terme $n^{-s}S_n$ tend vers 0 car $s>0$ et (S_n) est bornée. La série $\sum n^{-s}z^n$ est donc convergente.

3. a) Pour tout $t\in I$ et tout réel s, on a $\displaystyle\varphi(t,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-s}t^n$ d'où pour $t\neq 0$, $\displaystyle\frac{\varphi(t,s)}{t}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-s}t^{n-1}$, cette dernière expression pouvant se prolonger pour $t=0$.

Posons, pour $n\geqslant 1$: $u_n(t)=n^{-s}t^{n-1}$ et soit $x\in]-1,1[$. Pour tout $t\in[0,x]$ (ou $[x,0]$), on a $\left|n^{-s}t^{n-1}\right|\leqslant n^{-s}\,|x|^{n-1}$, donc $\|u_n\|_\infty^{[0,x]}\leqslant n^{-s}\,|x|^{n-1}$, qui est le terme général d'une série convergente d'après la question 1.

Cela signifie que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$ est normalement, donc uniformément, convergente sur le segment $[0,x]$.
De plus, les fonctions u_n sont continues, et, d'après un théorème du cours, on peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[0,x]$:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x n^{-s}t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s-1}x^n = \varphi(x,s+1)\,.$$

b) $\varphi(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$ (somme d'une série géométrique de raison x et de premier terme x) et $\varphi(x,1) = \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t,0)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x)$.
On retrouve, pour $x\in]-1,1[$, l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ (développement en série déjà vu en cours et à savoir par coeur).

4. a) f_n est continue sur $[0,+\infty[$ (car $s>1$) et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$ d'après les croissances comparées. Or la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable et positive au voisinage de $+\infty$. D'après les théorèmes de comparaison, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Le changement de variable $u=nt$ (qui est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$) donne directement

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = n^{-s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{s-1}\ \mathrm{d}t = n^{-s}\Gamma(s)\,.$$

b) Posons $u_n(t) = z^n f_n(t) = t^{s-1}\,(z\mathrm{e}^{-t})^n$. Pour $t>0$, $|z\mathrm{e}^{-t}|\leqslant \mathrm{e}^{-t}<1$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est la fonction $S\,:\,t\mapsto t^{s-1}\dfrac{z\mathrm{e}^{-t}}{1-z\mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{z\,t^{s-1}}{\mathrm{e}^t-z}$, qui est continue sur $]0,+\infty[$.
Chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, puisque $|u_n|\leqslant f_n$ et que f_n l'est.
$\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|\ \mathrm{d}t = |z|^n\int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = |z|^n\,n^{-s}\Gamma(s)\leqslant n^{-s}\Gamma(s)$, qui est le terme général d'une série convergente, car $s>1$.
D'après le théorème de convergence d'une série en norme $\|\ \|_1$, on en déduit que S est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n$, ce qui s'écrit :

$$z\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t-z}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n\,n^{-s}\Gamma(s)$$

ou encore

$$\varphi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-z}\ \mathrm{d}t\,.$$

Rem : on a bien $\Gamma(s)>0$ puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle...

Partie II

1. a) On reprend ici la technique utilisée en **I.2** (*transformation d'Abel*) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k}(S_k-S_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{S_k}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{S_{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{S_k}{k} - \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{S_k}{k+1}$$
$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) - \frac{S_n}{n+1}$$

donc, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité $|S_n| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$ démontrée en **I.2.c**

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{i\theta}}{k}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |S_k| \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{\geqslant 0} + \frac{|S_n|}{n+1} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \left(\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{=\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \cdot \frac{2}{n+1}.$$

Donc, pour $\theta \in [\alpha, \beta] \subset]0, 2\pi[$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{i\theta}}{k} \right\|_{\infty}^{[\alpha,\beta]} \leqslant \max\left(\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}, \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right|} \right) \cdot \frac{2}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les restes de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ convergent donc uniformément vers 0 sur $[\alpha, \beta]$, ce qui signifie que cette série de fonctions converge uniformément sur cet intervalle.

b) • $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 e^{in\theta} t^{n-1}\,dt = e^{i\theta} \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} \left(te^{i\theta}\right)^{n-1} dt = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{1 - t^N e^{iN\theta}}{1 - te^{i\theta}}\,dt.$

En effet, on peut ici intervertir la somme et l'intégrale puisqu'il s'agit d'une somme finie, et on a utilisé la formule qui donne la somme des N premiers termes d'une suite géométrique de raison $te^{i\theta} \neq 1$.

• On a donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}}\,dt - r_N$ avec $\displaystyle r_N = \int_0^1 \frac{t^N e^{i(N+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}}\,dt$. On a alors

$$|r_N| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{t^N e^{i(N+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}} \right| dt = \int_0^1 \frac{t^N}{|1 - te^{i\theta}|}\,dt$$

Or $\left|1 - te^{i\theta}\right|^2 = 1 - 2t\cos\theta + t^2$ et une rapide étude des variations de la fonction $t \mapsto 1 - 2t\cos\theta + t^2$ montre que son minimum, pour $t \in [0,1]$, est atteint pour $t = \cos\theta$ si $\cos\theta \geqslant 0$ et pour $t = 0$ sinon. Dans le premier cas, ce minimum est $\sin^2\theta$ et dans le second cas, il vaut 1. Puisque $\theta \in]0, 2\pi[$, on aura donc toujours l'existence d'un réel $m > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $\left|1 - te^{i\theta}\right| \geqslant m > 0$.

On en déduit $\displaystyle |r_N| \leqslant \frac{1}{m} \int_0^1 t^N\,dt = \frac{1}{m}\frac{1}{n+1}$, donc $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} r_N = 0$.

• Il en résulte :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}}\,dt.$$

c) • Supposons d'abord $0 < \theta < \pi$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-t} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\cos\theta - t - \mathrm{i}\sin\theta}\\
&= -\int_0^1 \frac{t-\cos\theta}{t^2-2t\cos\theta+1}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\sin\theta\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\\
&= -\frac{1}{2}\Big[\ln(t^2-2t\cos\theta+1)\Big]_0^1 + \mathrm{i}\left[\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{t-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]_0^1\\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\operatorname{Arc\,tan}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} - \operatorname{Arc\,tan}(-\cot\theta)\right)\\
&= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\operatorname{Arc\,tan}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{Arc\,tan}\left(\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\\
&= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi-\theta}{2}
\end{aligned}$$

- Supposons maintenant $\pi < \theta < 2\pi$. En posant $\theta' = 2\pi - \theta$, de sorte que $0 < \theta' < \pi$, on a, en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta'}}{1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta'}}\,\mathrm{d}t &= \overline{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}\,\mathrm{d}t}\\
&= -\ln\left(2\sin\frac{\theta'}{2}\right) - \mathrm{i}\frac{\pi-\theta'}{2}\\
&= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi-\theta}{2}
\end{aligned}$$

  donc le résultat est encore valable dans ce cas.
- Enfin, si $\theta = \pi$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\ln 2$, et la formule reste vraie.

d) • Compte tenu des deux questions précédentes, on a

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi-\theta}{2}$$

d'où en prenant la partie imaginaire des deux membres :

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}\,.$$

- On a vu que la série de fonctions précédente est uniformément convergente sur tout segment $[\varepsilon, \theta]$ de $]0, 2\pi[$, ce qui permet d'écrire :

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[\ ,\ \int_\varepsilon^\theta \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_\varepsilon^\theta \frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\varepsilon - \cos n\theta}{n^2}$$

  Or, pour $\theta \in]0, 2\pi[$ fixé, la série de fonctions de la variable $\varepsilon \in]0, 2\pi[$ est normalement convergente puisque $\left|\dfrac{\cos n\varepsilon - \cos n\theta}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{n^2}$; elle est donc aussi uniformément convergente sur $]0, 2\pi[$, et le théorème d'interversion des limites permet alors d'écrire

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[\ ,\ \int_0^\theta \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n}\right)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\varepsilon - \cos n\theta}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos n\theta}{n^2}\,.$$

  Puisque $\displaystyle\int_0^\theta \frac{\pi-t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\theta}{2}\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)$, on obtient bien :

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos n\theta}{n^2} = \frac{\theta}{2}\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)$$

  cette égalité restant évidemment valable pour $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$.

e) • Pour $\theta=\pi$, l'égalité ci-dessus donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}$$

Or $1-(-1)^n=0$ si n est pair. Il ne reste donc dans la somme ci-dessus que les termes d'indice impair d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Si l'on note $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, on a

$$S=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}+\frac{S}{4}$$

soit finalement $\dfrac{3S}{4}=\dfrac{\pi^2}{8}$ puis $S=\dfrac{\pi^2}{6}$.

• On aura alors, pour $\theta\in[0,2\pi]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{\theta}{2}\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\theta}{2}\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)=\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)^2-\frac{\pi^2}{12}.$$

2. a) $\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},2)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^2}$, donc $R_\varphi(\theta)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}=g(\theta)-\frac{\pi^2}{12}$, pour $\theta\in[0,2\pi]$ d'après la question précédente, cette égalité se prolongeant à $\theta\in\mathbb{R}$ par périodicité.

b) D'après **I.**4.b, $\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{2t}-2\cos\theta\,\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t.$
En prenant la partie réelle et en appliquant 2.a, il vient

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\,(\cos\theta\,\mathrm{e}^t-1)}{\mathrm{e}^{2t}-2\cos\theta\,\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t=R_\varphi(\theta)=g(\theta)-\frac{\pi^2}{12}\cdot$$

c) En prenant $\theta=0$, puis $\theta=\pi$ dans 2.b, et en simplifiant dans l'intégrale par e^t-1 ou par e^t+1, on obtient :

$$I_1=g(0)-\frac{\pi^2}{12}\quad\text{et}\quad -I_2=g(\pi)-\frac{\pi^2}{12},\quad\text{soit}\quad I_1=\frac{\pi^2}{6}\quad\text{et}\quad I_2=\frac{\pi^2}{12}\cdot$$

On remarque ensuite que $\dfrac{1}{\operatorname{sh}t}=\dfrac{2\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}-1}=\dfrac{(\mathrm{e}^t+1)+(\mathrm{e}^t-1)}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^t-1)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^t-1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$,

donc $I_3=I_1+I_2=\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$

3. a) **I.**4.b donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^{s+1}}=\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},s+1)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty}\frac{t^s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{2t}-2\cos\theta\,\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$$

Il suffit alors de séparer la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir les deux égalités demandées.

b) On procède comme à la question 2.c. En prenant $\theta=0$ et $\theta=\pi$ dans la première des égalités du 3.a, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\mathrm{e}^t + 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{s+1}}\cdot$$

Comme on l'a vu en 2.c, $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{1}{e^t - 1} + \dfrac{1}{e^t + 1}\cdot$ En ajoutant les deux égalités ci-dessus, il ne reste dans la somme que les termes d'indice impair, et on obtient donc

$$J(s) = 2\,\Gamma(s+1)\,S_1(s)$$

En prenant maintenant $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ dans la seconde égalité du 3.a et en remarquant que $\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1} = \dfrac{1}{2\operatorname{ch} t}$, on obtient $\dfrac{I(s)}{2} = \Gamma(s+1)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^{s+1}} = \Gamma(s+1)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{s+1}}$, soit :

$$I(s) = 2\,\Gamma(s+1)\,S_2(s)$$