DM N°8 (pour le 27/01/2017)

Intégrales elliptiques.

PARTIE I : Moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \geqslant b_n$.

3. Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

On notera $M(a,b)$ leur limite commune.

4. Démontrer que, pour tous réels a, b, c strictement positifs :

a) $M(b,a) = M(a,b)$;

b) $M(ca,cb) = cM(a,b)$;

c) $M(a,b) = M\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.

5. Démontrer que $a_{n+1} - b_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(a_n-b_n)^2}{8M(a,b)}$.

6. Écrire une fonction PYTHON `M(a,b,eps)` permettant de calculer $M(a,b)$ à une précision `eps` donnée.

PARTIE II : Intégrales elliptiques

Pour $x \in [0\,;1[$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}$.

1. Montrer que φ est bien définie sur $[0\,;1[$.

Pour la suite, on *admettra* que φ est continue sur $[0\,;1[$ (les 5/2 peuvent le démontrer...).

2. Montrer que φ est croissante sur $[0\,;1[$.

3. Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on pose $\sin\theta = \dfrac{(1+x)\sin t}{1+x\sin^2 t}$.

a) Démontrer que cette relation permet de définir une application $u : \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ avec $\theta = u(t)$.

b) Démontrer que u est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

4. Démontrer :

a) $\cos\theta = \dfrac{\cos t}{1+x\sin^2 t}\sqrt{1-x^2\sin^2 t}$;

b) $\dfrac{1 - x\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t} = \sqrt{1 - \dfrac{4x}{(1+x)^2}\sin^2\theta}$;

c) $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x}\varphi\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

5. Soit $0 < b \leqslant a$ et soit : $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}$ ·

Montrer que $I(a,b) = \dfrac{1}{a}\varphi\left(\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$, et en déduire : $I(a,b) = I\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.

6. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant définies comme dans la première partie, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ I(a_n, b_n) = I(a,b).$$

En déduire : $I(a,b) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{M(a,b)}$ ·

7. Démontrer que, pour tout $x \in [0\,;1[$: $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{M(1, \sqrt{1-x^2})}$ ·

8. *Application 1 :* On pose $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Montrer que :

a) $K = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$ (intégrer par parties).

b) $K = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$ (poser $u = \sqrt{\sin\theta}$) .

c) $K = \dfrac{\pi}{3M(1,\sqrt{2})}$ ·.

9. *Application 2 :*

On considère la *lemniscate de Bernouilli* dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) & = (\sqrt{\cos 2t})\cos t \\ y(t) & = (\sqrt{\cos 2t})\sin t \end{cases} .$$

a) Étude et courbe représentative.

b) Prouver que sa longueur L est donnée par

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\ ·$$

c) A l'aide du changement de variable $\varphi = \mathrm{Arc}\cos(\sqrt{\cos 2\theta})$, montrer que :

$$L = \frac{2\pi}{M(1,\sqrt{2})}\ ·$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆