CORRIGÉ DM N°8 : extrait de ENSIETA 1991

PARTIE I : Moyenne arithmético-géométrique

1. Il est facile de démontrer par récurrence sur n la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ll a_n \text{ et } b_n \text{ sont définis et strictement positifs } \gg$$

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n - b_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) - \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}\right)^2 \geqslant 0$.

3.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) \leqslant 0$, donc la suite (a_n) est décroissante (au moins à partir du rang 1).
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) \geqslant 0$, donc la suite (b_n) est croissante (au moins à partir du rang 1).
- On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \geqslant a_n \geqslant b_n \geqslant b_1$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, minorée par b_1, donc converge vers un certain réel $\ell \geqslant 0$; la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, majorée par a_1, donc converge vers un certain réel $\ell' \geqslant 0$.

  Par passage à la limite dans les relations de récurrence qui définissent les deux suites, on obtient

  $$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \ell') \quad \text{et} \quad \ell' = \sqrt{\ell\ell'}$$

  d'où $\ell = \ell'$.

Cela prouve bien que <u>les deux suites sont adjacentes.</u>

4. a) Soient (a_n) et (b_n) définies comme dans l'énoncé, et soient (a'_n) et (b'_n) les deux suites adjacentes qui convergent vers $M(b, a)$, c'est-à-dire définies par :

$$\begin{cases} a'_0 = b \\ b'_0 = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} , \begin{cases} a'_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(a'_n + b'_n) \\ b'_{n+1} &= \sqrt{a'_n b'_n} \end{cases}$$

On a alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$, d'où on tire facilement par récurrence $a_n = a'_n$ et $b_n = b'_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Par passage à la limite, on en déduit $\boxed{M(b, a) = M(a, b).}$

b) Soient (a_n) et (b_n) définies comme dans l'énoncé, et soient (a'_n) et (b'_n) les deux suites adjacentes qui convergent vers $M(ca, cb)$, c'est-à-dire définies par :

$$\begin{cases} a'_0 = ca \\ b'_0 = cb \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} , \begin{cases} a'_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(a'_n + b'_n) \\ b'_{n+1} &= \sqrt{a'_n b'_n} \end{cases}$$

c étant un réel positif, il est facile de démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a'_n = ca_n$ et $b'_n = cb_n$. Par passage à la limite, on en déduit $\boxed{M(ca, cb) = cM(a, b).}$

c) Soient (a_n) et (b_n) définies comme dans l'énoncé, et soient (a'_n) et (b'_n) les deux suites adjacentes qui convergent vers $M\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$, c'est-à-dire définies par :

$$\begin{cases} a'_0 = \dfrac{a+b}{2} \\ b'_0 = \sqrt{ab} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} , \begin{cases} a'_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(a'_n + b'_n) \\ b'_{n+1} &= \sqrt{a'_n b'_n} \end{cases}$$

On a alors $a'_0 = a_1$ et $b'_0 = b_1$, d'où on tire facilement par récurrence $a'_n = a_{n+1}$ et $b'_n = b_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on en déduit $\boxed{M(a, b) = M\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).}$

5. $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(a_n - b_n)^2}{8M(a, b)}$ puisque $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}) = 2\sqrt{M(a, b)}$.

6. Vraiment aucune difficulté !

```python
from math import sqrt

def M(a,b, eps=1e-10):
    ''' moyenne arithmético-géométrique de a et b à eps près (1e-10 par défaut)'''
    while abs(a - b) > eps:
        temp = a
        a = 0.5 * (a + b)
        b = sqrt(temp * b)
        # mieux, en Python on peut écrire directement:
        # a, b = 0.5 * (a + b), sqrt(a * b)
    return (a + b) / 2

print(M(2, 3))
```

```
2.474680436236304
```

PARTIE II : Intégrales elliptiques

1. Puisque $x \in [0\,;1[$, la fonction $t \mapsto 1 - x^2 \sin^2 t$ est strictement positive pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\varphi(x)$ existe.

Rem : La continuité de φ, qui était admise par l'énoncé, se démontre sans grande difficulté à l'aide du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre (exercice).

2. Soient $x, y \in [0\,;1[^2$ tels que $x < y$. Alors, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{1 - \ x^2 \sin^2 t} > \sqrt{1 - y^2 \sin^2 t}$ d'où facilement $\varphi(x) < \varphi(y)$: φ est strictement croissante sur $[0\,;1[$.

3. a) Pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{(1+x)\sin t}{1 + x\sin^2 t}$ est une fonction homographique croissante sur $[0\,;1[$, donc

$$\forall x \in [0\,;1[\,, \forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\,,\quad 0 \leqslant \underbrace{\sin t}_{\text{pour } x=0} \leqslant \frac{(1+x)\sin t}{1 + x\sin^2 t} \leqslant \underbrace{\frac{2\sin t}{1+\sin^2 t}}_{\text{pour } x=1} \leqslant 1$$

On peut donc définir $\theta = \operatorname{Arc}\sin\left(\dfrac{(1+x)\sin t}{1 + x\sin^2 t}\right)$, et on aura $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) • Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $u(t) = \operatorname{Arc}\sin\left(\dfrac{(1+x)\sin t}{1 + x\sin^2 t}\right) = v \circ \sin(t)$ où v est l'application de $[0\,;1]$ dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ définie par $v(s) = \operatorname{Arc}\sin\left(\dfrac{(1+x)s}{1+xs^2}\right)$.

On vérifie facilement que $\dfrac{(1+x)s}{1+xs^2} = 1 \iff s = 1$ ou $(x \neq 0$ et $s = \dfrac{1}{x}) \iff s = 1$ puisque $s \in [0\,;1]$ et $x \in [0\,;1[$. La fonction $\operatorname{Arc}\sin$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1[$, v sera de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1[$, et u de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

De plus

$$\begin{aligned}
\forall s \in [0\,;1[\,,\ v'(s) &= (1+x)\frac{1-xs^2}{(1+xs^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{(1+x)s}{1+xs^2}\right)^2}} \\
&= (1+x)\frac{1-xs^2}{(1+xs^2)}\frac{1}{\sqrt{(1+xs^2)^2-(1+x)^2s^2}} \\
&= (1+x)\frac{1-xs^2}{(1+xs^2)}\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-x^2s^2)}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\,,\ u'(t) = \cos t \cdot v'(\sin t) &= (1+x)\frac{1-x\sin^2 t}{(1+x\sin^2 t)}\frac{\cos t}{\sqrt{(1-\sin^2 t)(1-x^2\sin^2 t)}} \\
&= (1+x)\frac{1-x\sin^2 t}{(1+x\sin^2 t)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}
\end{aligned}$$

Cette expression montre que $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} u'(t)$ existe ; u étant continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ comme composée de fonctions continues, le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ permet d'affirmer que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

- Le calcul précédent montre aussi que $u'(t) > 0$ pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donc u est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Elle réalise donc une bijection de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[u(0)\,;u\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

4. a) Calcul simple, en utilisant $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ puisque $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, et l'expression de $\sin\theta$...

b) calcul simple là encore...

c) On a : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}$. On effectue alors dans cette intégrale le changement de variable $t = u^{-1}(\theta)$: cela ne pose pas de problème puisque u est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$). On a alors $\theta = u(t)$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta = u'(t)\,\mathrm{d}t &= (1+x)\frac{1-x\sin^2 t}{(1+x\sin^2 t)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}} \\
&= (1+x)\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2\theta}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}
\end{aligned}$$

compte tenu de tous les calculs précédents, donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2\theta}} = \frac{1}{1+x}\varphi\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

5. •

$$\begin{aligned}
I(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}} = \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)
\end{aligned}$$

compte tenu de $0 < b \leqslant a$ (et l'on a bien $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0\,;1[$) .

- Puisque l'on a aussi $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} > 0$, on aura de la même façon :

$$\begin{aligned}
I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right) &= \frac{2}{a+b}\varphi\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}}{\frac{a+b}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{a+b}\varphi\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \\
&= \frac{2}{a+b}\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}}\varphi\left(\frac{2\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}{1+\frac{a-b}{a+b}}\right) \qquad \text{d'après 4.c} \\
&= \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right) = I(a,b)
\end{aligned}$$

6. Supposons $a \geqslant b$. Alors on a vu que $a_n \geqslant b_n$ pour tout n, donc, d'après le résultat de la question précédente, $I(a_n,b_n) = I\left(\dfrac{a_n+b_n}{2},\sqrt{a_nb_n}\right) = I(a_{n+1},b_{n+1})$, d'où l'on tire facilement par récurrence $I(a_n,b_n) = I(a_0,b_0) = I(a,b)$.
Ce résultat demeure vrai si $a \leqslant b$, puisque le changement de variable $t \mapsto \frac{\pi}{2}-t$ montre que $I(a,b) = I(b,a)$.
La fonction I étant continue (puisque φ l'est), l'égalité précédente donne, par passage à la limite,
$I(a,b) = I\big(M(a,b),M(a,b)\big) = \dfrac{1}{M(a,b)}\varphi(0) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{M(a,b)}$.

7. La relation $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{M(1,\sqrt{1-x^2})}$ pour $x \in [0\,;1[$ découle du résultat précédent avec $a = 1$ et $b = \sqrt{1-x^2}$.

8. a) On intègre par parties $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta\,\mathrm{d}\theta$ en prenant $u'(\theta) = \sin\theta$ et $v(\theta) = \sqrt{\sin\theta}$:

$$\begin{aligned} K &= \Big[-\cos\theta\sqrt{\sin\theta}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{\sin\theta}} - \frac{K}{2} \end{aligned}$$

ce qui donne bien $\boxed{K = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta}}.}$

Rem : l'intégrale impropre obtenue est forcément convergente, puisque l'intégrale de départ K existe. On peut aussi le vérifier a posteriori en remarquant que $\dfrac{1}{\sqrt{\sin\theta}} \underset{\theta\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\theta^{1/2}}$, et en utilisant les théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, puisque l'on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{1/2}}$ converge.

b) Le changement de variable $u = \sqrt{\sin\theta}$, soit $\theta = \operatorname{Arc\,sin} u^2$, qui est une bijection strictement monotone de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0\,;1[$, donne $\mathrm{d}\theta = \dfrac{2u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$, d'où $\boxed{K = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}.}$

c) Puis en posant, dans l'intégrale ci-dessus, $u = \sin t$, qui réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0\,;1[$, on obtient

$$\begin{aligned} K = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1+u^2)}} &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t(1+\sin^2 t)}} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + 2\sin^2 t}} = \frac{2}{3}I(1,\sqrt{2}) = \frac{\pi}{3M(1,\sqrt{2})}\,. \end{aligned}$$

9.
- Les fonctions x et y sont définies pour t tel que $\cos 2t \geqslant 0$, soit $t \in \left[-\frac{\pi}{4},\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ modulo π.

  De plus, les fonctions x et y sont toutes deux 2π-périodiques, donc on obtiendra toute la courbe en l'étudiant pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$.

  Puisque $x(t+\pi) = -x(t)$ et $y(t+\pi) = -y(t)$, il suffit de l'étudier pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ puis de compléter la courbe obtenue par symétrie par rapport à O.

  Enfin, puisque $x(-t) = x(t)$ et $= -y(t)$, il suffit de l'étudier pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ puis de compléter la courbe obtenue par symétrie par rapport à l'axe Ox.

- Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, x et y sont dérivables et, après calculs

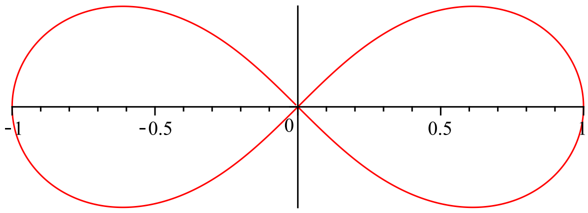
$$x'(t) = -\frac{\sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}} \quad ; \quad y'(t) = \frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}\,.$$

  On a donc les tableaux de variations :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0		$-$		$\Vert$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	0

  La pente de la tangente en O sera $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} -\tan 3t = 1$

- Courbe :



- La longueur de la courbe est égale à 4 fois la longueur de la portion dans le quart de plan supérieur droit, soit

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos 2t}}\,\cdot$$

- Le changement de variable $u = 2t$ donne $L = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\cos u}}$ puis le changement de variable $\theta = \frac{\pi}{2} - u$ donne $L = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = 6K = \frac{2\pi}{M(1,\sqrt{2})}\cdot$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆