PROBLÈME 1 - CENTRALE MP 2011

I étude préliminaire

I.A Convergence des séries de Riemann

I.A.1. Soit $k \geqslant a+1$. $\forall x \in [k\,;k,k+1]$, $\forall y \in [k-1\,;k]$, $f(x) \leqslant f(k) \leqslant f(y)$ par décroissance de f d'où :

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{k-1}^{k} f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

I.A.2. *Question de cours !*

– Pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0).

– Pour $\alpha > 1$, on applique la question précédente pour $a = 1$, et $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}\cdot$

$\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ donc $\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot$

La suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est croissante majorée, elle converge.

– Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, on applique aussi la question précédente pour $a = 1$, et $f(t) = \dfrac{1}{t}\cdot$

$\forall k \geqslant 1,\ \dfrac{1}{k^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc $\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty.$

Conclusion : la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

I.A.3. D'après le calcul fait à la question précédente, pour tout $\alpha > 1$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot$

On fait tendre n vers l'infini, on obtient alors : $1 \leqslant S(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot$

I.B Première étude asymptotique du reste

I.B.1. $\forall k \geqslant n \geqslant 2,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, donc en sommant, pour tout entier $N \geqslant n$,

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

soit

$$\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_n^{N+1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{n-1}^{N}.$$

On fait encore tendre N vers l'infini et on obtient :

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}\left|R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right| &\leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\\ &\leqslant \frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} + 1\right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(\frac{\alpha-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).\end{aligned}$$

Finalement : $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

I.B.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\cdot$

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$; d'après la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à f entre k et $(k+1)$ on a :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{f''(k)}{2} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} f'''(t)\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

avec

$$A_k = \int_k^{k+1} (k+1-t)^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t.$$

On a alors :

$$0 \leqslant A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \int_k^{k+1} (k+1-t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \int_k^{k+1} \mathrm{d}t$$

soit $0 \leqslant A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}\cdot$

I.B.3. D'après **I.B.2**) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) - f(k) - \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} = A_k$$

d'où en sommant, pour $N \geqslant n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant f(N+1) - f(n) - \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^{\alpha+1}} = \sum_{k=n}^{N} A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^{\alpha+2}}\,.$$

On fait tendre N vers l'infini, on obtient alors, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$:

$$0 \leqslant -f(n) - R_n(\alpha) + \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}R_n(\alpha+2).$$

D'aprés **I.B.1**) on a :

$$R_n(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \quad \text{et} \quad R_n(\alpha+2) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right),$$

d'où $-f(n) - R_n(\alpha) + \dfrac{1}{2n^\alpha} = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ c'est à dire : $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{2n^\alpha} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A Nombres de Bernoulli

II.A.1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Posons : $g = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!} &= \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i+j)} = \sum_{k=1}^{2p-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)} \\ &= a_0 f' + \sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)} + \sum_{k=p+1}^{2p-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)}.\end{aligned}$$

Soit alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall\, k \geqslant 2,\ a_{k-1} = -\sum\limits_{i=0}^{k-2} \frac{a_i}{(k-i)!}\,. \end{cases}$

L'égalité précédente devient alors :

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{k=p+1}^{2p-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right) f^{(p+l)}\,.$$

On pose alors : $\forall\, l \in [\![1\,;p-1]\!]$: $b_{l,p} = \sum\limits_{i=0}^{l+p-1} \dfrac{a_i}{(l+p-i)!}$, et on obtient le résultat demandé.

II.A.2. Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite répondant aux conditions de la question précédente.

D'après le calcul fait à la question précédente : $\forall\, p\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, f\in\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{C})$:

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!}=a_0f'+\sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}+\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right)f^{(p+l)}=f'+\sum_{l=1}^{p-1}b_{l,p}f^{(p+l)}$$

soit

$$(a_0-1)f'+\sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}+\sum_{l=1}^{p-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right)-b_{l,p}\right)f^{(p+l)}=0.$$

Pour $f(x)=x^p$, cette égalité s'écrit :

$$p(a_0-1)x^{p-1}\sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)\frac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}=0.$$

C'est un polynôme nul, donc ses coefficients sont nuls, et par suite :

$$a_0=1\ \text{ et }\ \forall\, k\geqslant 2,\ a_{k-1}=-\sum_{j=0}^{k-2}\frac{a_j}{(k-j)!}$$

ou encore, en posant : $p=k-1$ et $i=k-j=p+1-j$:

$$a_0=1\quad\text{ et }\quad\forall\, p\geqslant 1,\ a_p=-\sum_{i=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-i}}{i!}\cdot$$

En particulier, $a_1=-\dfrac{1}{2}$ et $a_2=\dfrac{1}{12}\cdot$

Montrons enfin par récurrence sur p que : $\forall\, p\in\mathbb{N},\ |a_p|\leqslant 1$.

Ceci est évident pour $p=0$; soit $p\geqslant 1$ tel que : $\forall\, k\in[\![0\,;p-1]\!],\ |a_k|\leqslant 1$.

Alors : $\forall\, i\in[\![2\,;p+1]\!],\ |a_{p+1-i}|\leqslant 1$. D'où : $|a_p|=\left|\displaystyle\sum_{i=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-i}}{i!}\right|\leqslant\displaystyle\sum_{i=2}^{p+1}\frac{1}{i!}\leqslant \mathrm{e}-2\leqslant 1$. Cela achève la récurrence.

II.A.3.

(a) $\forall\, p\in\mathbb{N}^*,\ |a_p|\leqslant 1$, donc $\forall\, p\in\mathbb{N},\ \forall\, z\in\mathbb{C},\ |a_pz^p|\leqslant|z|^p$.
Si $|z|<1$, alors la série $\left(\sum|z|^p\right)$ converge, et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}}a_pz^p$ converge absolument. On note alors : $\varphi(z)=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}a_pz^p$.

(b) Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, les deux séries : $\mathrm{e}^z-1=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ et $\varphi(z)=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}a_pz^p$ sont absolument convergentes; donc si $(\mathrm{e}^z-1)\varphi(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}d_nz^n$ est la série produit de Cauchy de ces deux séries, le rayon de convergence de cette série est *a priori* $\geqslant 1$ et l'on a d'après les formules du cours :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ d_{n+1}=\sum_{p=1}^{n+1}\frac{a_{n+1-p}}{p!}=a_n+\sum_{p=2}^{n+1}\frac{a_{n+1-p}}{p!}=0\ \text{ et }\ d_1=a_0=1.$$

Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, $(\mathrm{e}^z-1)\varphi(z)=z$ et $\varphi(z)=\dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1}$ si $z\neq 0$.

(c) Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, posons :

$$\psi(z)=\varphi(z)-a_1z=\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{2z+z(\mathrm{e}^z-1)}{2(\mathrm{e}^z-1)}=\frac{z+z\mathrm{e}^z}{2(\mathrm{e}^z-1)}\cdot$$

Alors $\psi(-z)=\dfrac{z+z\mathrm{e}^{-z}}{2(1-\mathrm{e}^{-z})}=\dfrac{(z+z\mathrm{e}^{-z})\,\mathrm{e}^z}{2(1-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{e}^z}=\psi(z)$, et $\psi(z)=1+\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}a_kz^k$ est la somme d'une série entière paire sur $D(0,1)$.

On en déduit : $\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ a_{2k+1}=0$.

Enfin, $a_4=-\displaystyle\sum_{i=2}^{5}\frac{a_{5-i}}{i!}=-\left(\frac{a_0}{5!}+\frac{a_1}{4!}+\frac{a_2}{3!}+\frac{a_3}{2!}\right)=-\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{48}+\frac{1}{72}\right)=-\frac{6-15+10}{720}=-\frac{1}{720}\cdot$

(*ce résultat peut aussi s'obtenir en faisant un développement limité de* $x\mapsto\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ *à l'ordre* 4 *en* 0).

II.B Formule de Taylor

II.B.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

On fixe un entier naturel non nul p et on note :

$$g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}.$$

Remarquons d'abord que puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, g l'est aussi.
Appliquons à g la formule de Taylor avec reste intégrale entre k et $(k+1)$ à l'ordre $2p$:

$$\begin{aligned}
g(k+1) &= g(k) + \sum_{j=1}^{2p} \frac{1}{j!} g^{(j)}(k) + \frac{1}{(2p)!}\int_k^{k+1} g^{(2p+1)}(t)\,(k+1-t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= g(k) + \sum_{j=1}^{2p} \frac{1}{j!} g^{(j)}(k) + \frac{1}{(2p)!}\int_0^{1} g^{(2p+1)}(k+t)\,(1-t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= f'(k) + \underbrace{\sum_{l=1}^{2p} b_{l,2p} f^{(l+2p)}(k) + \frac{1}{(2p)!}\int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i+2p+1)}(k+t)\right)(1-t)^2\,\mathrm{d}t}_{R(k)}.
\end{aligned}$$

Or $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{x^{\alpha+n-1}}$ donc

$$\begin{aligned}
\left|R(k)\right| &= \left|\sum_{n=2p+1}^{4p} b_{n-2p,2p}(-1)^{n-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}} + \int_0^1\left[\sum_{n=2p+1}^{4p} a_{n-2p-1}(-1)^{n-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{(2p)!(k+t)^{\alpha+n-1}}\right](1-t)^2\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{n=2p+1}^{4p}\left|b_{n-2p,2p}\right|\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}} + \frac{1}{(2p)!}\int_0^1\left(\sum_{n=2p+1}^{4p}\left|a_{n-2p-1}\right|\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{(k+t)^{\alpha+n-1}}\right)(1-t)^2\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \left[\sum_{n=2p+1}^{4p}\left(\left|b_{n-2p,2p}\right| + \frac{\left|a_{n-2p-1}\right|}{(2p)!}\right)\alpha\cdots(\alpha+n-2)\right] k^{-(2p+\alpha)}
\end{aligned}$$

donc, p étant fixé, $\exists A\in\mathbb{R},\ \forall\, k\in\mathbb{N}^*,\quad \left|R(k)\right| \leqslant A\,k^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2. D'après la question précédente : $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, $g(k+1)-g(k) = f'(k)+R(k)$, d'où en sommant :

$$\forall\, N\geqslant n\geqslant 1,\ \sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha} + \sum_{k=n}^{N} R(k) = g(N+1)-g(n) \qquad (*)$$

Or $g(N) = \dfrac{a_0}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{2p-1} a_i(-1)^i\frac{\alpha\ldots(\alpha+i-2)}{N^{\alpha+i-1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc en faisant tendre N vers l'infini dans $(*)$, on obtient : $|R_n(\alpha)+g(n)| \leqslant AR_n(\alpha+2p) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+2p-1}})\right)$, d'où : $R_n(\alpha) = -g(n) + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right)$.

Cela s'écrit encore : $R_n(\alpha) = -\displaystyle\sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)}(n) + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right)$. Or pour $p\geqslant 2$, $a_{2p-1}=0$, donc pour $p\geqslant 2$, on a :

$$R_n(\alpha) = -\sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right).$$

Or on a déjà établi cette égalité dans la première partie pour $p=1$, elle est donc vraie pour tout entier non nul p.

II.B.3. Pour $p=3$, il vient

$$R_n(\alpha) = -\left(\frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{720n^{\alpha+3}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+5}}\right)$$

soit, en particulier,

$$R_n(3) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^8}\right).$$

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.A Polynômes de Bernoulli

III.A.1. (a) ◇ Montrons l'existence et l'unicité de A_n par récurrence sur n.

Pour $n=0$, A_0 est donné directement et c'est bien un polynôme.

Si A_n existe et est unique alors soit F la primitive de A_n qui s'annule en 0, F est un polynôme et

$$\left(A'_{n+1}=A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t=0\right) \iff \left(A_{n+1}=F+C \ (C \text{ constante}) \text{ et } C=-\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

donc la constante C existe et est unique et donc le polynôme A_{n+1} existe et est unique.

Ainsi les conditions de **III.1** définissent une unique suite $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

◇ Montrons, par récurrence sur n, que $\deg(A_n)=n$: c'est clair pour $n=0$, et si c'est vrai pour n, alors $A'_{n+1}(X)=A_n(X)=\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}X^k$ avec $c_{n,n}\neq 0$ donc $A_{n+1}(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_{n,k}}{k+1}X^{k+1}+c_{n+1,0}$ est de degré $n+1$.

On peut d'ailleurs montrer en même temps que $c_{n,n}=\frac{1}{n!}$.

◇ On trouve facilement :

$$A_1=X-\frac{1}{2},\ A_2=\frac{X^2}{2}-\frac{X}{2}+\frac{1}{12},\ A_3=\frac{X^3}{6}-\frac{X^2}{4}+\frac{X}{12}.$$

(b) Posons $C_n(x)=(-1)^n A_n(1-x)$; C_n est une fonction polynôme et on a :

$$C_0=1 \quad \text{et} \quad \forall\, n\geqslant 1,\ C'_n(x)=(-1)^{n+1}A'_n(1-x)=(-1)^{n+1}A_{n-1}(1-x)=C_{n-1}(x)$$

et

$$\int_0^1 C_n(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1 A_n(1-t)\,\mathrm{d}t \underset{u=1-t}{=} (-1)^n\int_0^1 A_n(u)\,\mathrm{d}u=0.$$

Donc la suite $\left(C_n\right)$ vérifie les conditions de **III.1** et donc, par unicité, $C_n=A_n$ pour tout n ce qui donne :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in\mathbb{R},\ A_n(x)=(-1)^n A_n(1-x).$$

(c) ◇ Pour $n\geqslant 2$, $A_n(1)-A_n(0)=\int_0^1 A'_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 A_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t=0$ donc $A_n(1)=A_n(0)$.

◇ Selon (**b**), $A_{2n-1}(0)=-A_{2n-1}(1-0)=-A_{2n-1}(0)$ d'après ci-dessus donc : $\forall\, n\geqslant 2,\ A_{2n-1}(0)=0$.

(d) ◇ Montrons, par récurrence sur n, que $A_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_{n-k}}{k!}X^k$.

C'est clair pour $n=0$, et si c'est vrai pour n, alors $A'_{n+1}(X)=A_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_{n-k}}{k!}X^k$ donc $A_{n+1}(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_{n-k}}{(k+1)!}X^{k+1}+c_{n+1}$ car $c_{n+1}=A_{n+1}(0)$. Ceci donne bien $A_{n+1}(X)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{c_{n+1-k}}{k!}X^k$.

◇ L'égalité $A_{n+1}(1)=A_{n+1}(0)$ donne alors $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{c_{n+1-k}}{k!}=0$ soit : $\forall\, n\geqslant 1,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{(n+1-k)!}=0$.

(e) On $c_0=A_0(0)=1$ et, pour $n\geqslant 1$, $c_n=-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{c_{n+1-k}}{k!}$ donc, d'après **II.A.2** et par récurrence immédiate : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ c_n=a_n$.

III.A.2. (a) Pour $t\in[-1\,;1]$:

$$\left|A_n(t)\,z^n\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{k!}t^k\right||z|^n\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|a_{n-k}\right|}{k!}\right)|z|^n\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)|z|^n\leqslant \mathrm{e}\,|z|^n$$

en utilisant **II.A.2**. Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}|z|^n$ converge si $|z|<1$ donc si $t\in[-1\,;1]$ et $|z|<1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}A_n(t)\,z^n$ converge.

(b) Soit z fixé tel que $|z| < 1$.

$\diamond$ $u_n : \ t \mapsto A_n(t)\, z^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ avec $u_n'(t) = \begin{cases} A_{n-1}(t)\, z^n & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 1 \end{cases}$.

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur $[0\,;1]$ selon (**a**) et pour tout $n \geqslant 1$, $\left\|u_n'\right\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \mathrm{e}\,|z|^n$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[0\,;1]$. Le théorème de dérivation terme à terme permet de conclure, et comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(t)\, z^n = z \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)\, z^n$, $t \mapsto f(t,z)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ et $\forall\, t \in [0\,;1]$, $\dfrac{\partial}{\partial t} f(t,z) = z\, f(t,z)$.

$\diamond$ La fonction ci-dessus est donc solution de l'équation différentielle $y' = z\,y$ donc $\forall\, t \in [0\,;1]$, $f(t,z) = f(0,z)\,\mathrm{e}^{zt}$.
Or $f(0,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n = \varphi(z)$ donc si $t \in [0\,;1]$ et $0 < |z| < 1$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\, z^n = \frac{z\,\mathrm{e}^{zt}}{\mathrm{e}^z - 1}$.

(c) $\diamond$ Pour $0 < |z| < 2\pi$, on a $\mathrm{e}^z - 1 \neq 0$ et $\dfrac{z\,\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z - 1} + \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = z \dfrac{\mathrm{e}^{z/2} + 1}{\left(\mathrm{e}^{z/2} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{z/2} + 1\right)}$. On a donc bien si $0 < |z| < 2\pi$, $\dfrac{z\,\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z - 1} + \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = 2\dfrac{z/2}{\mathrm{e}^{z/2} - 1}$.

$\diamond$ Ainsi selon (**b**), pour $0 < |z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\left(\frac{1}{2}\right) z^n = \frac{z\,\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z - 1} = 2\frac{z/2}{\mathrm{e}^{z/2} - 1} - \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = 2\varphi\left(\frac{z}{2}\right) - \varphi(z) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Cette égalité reste vraie pour $z = 0$.
Par unicité du développement en série entière en 0, ceci donne :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n.$$

III.A.3. (a) Montrons par récurrence sur p que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a les tableaux de variations suivants :

x	0		α_{2p-1}		$\frac{1}{2}$		β_{2p-1}		1
$A_{4p-2}(x)$		↘	0	↘		↗	0	↗	1

x	0		α_{2p-1}		$\frac{1}{2}$		β_{2p-1}		1
$A_{4p-1}(x)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0

x	0		α_{2p}		$\frac{1}{2}$		β_{2p}		1
$A_{4p}(x)$		↗	0	↗		↘	0	↘	

x	0		α_{2p}		$\frac{1}{2}$		β_{2p}		1
$A_{4p+1}(x)$	0	↘		↗	0	↗		↘	0

$\diamond$ Pour $p = 1$, le tableau de de variations de A_2 est bien comme indiqué avec $\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$, puis, comme $A_3' = A_2$ et $A_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}a_3 = 0$ et $A_3(0) = A_3(1) = 0$, le tableau de variations de A_3 est celui voulu.
On en déduit, puisque $A_4' = A_3$ que A_4 croît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $A_4\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^3} - 1\right) a_4 > 0$ et donc, grâce à sa stricte monotonie, A_4 a une unique racine $\alpha_4 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. De même, puisque $A_4(1) = a_4 < 0$, A_4 décroît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et a une unique racine $\beta_4 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On a donc le tableau voulu pour A_4 et donc celui de A_5 en sachant que $A_5(0) = A_5(1) = A_5\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

$\diamond$ Si le résultat est vrai pour p, du tableau de A_{4p+1}, on déduit le signe de A_{4p+2}' qui donne la décroissance stricte de A_{4p+2} sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sa croissance stricte sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Si $A_{4p+2}\left(\frac{1}{2}\right)$ était positif, alors A_{4p+2} serait positive non nulle sur $[0\,;1]$ mais d'intégrale nulle, ce n'est pas possible.

Donc puisque $\frac{1}{2^{n-1}} - 1 < 0$, $A_{4p+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < a_{4p+2}$. On prouve de même par l'absurde que $A_{4p+2}(0) = A_{4p+2}(1)$ est strictement positif, donc A_{4p+2} s'annule une fois et une seule dans chaque intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On en déduit le signe de A_{4p+2} donc les variations de A_{4p+3}, puis son signe sachant que A_{4p+3} s'annule en 0, $\frac{1}{2}$ et 1. Les tableaux de variations de A_{4p+4} et A_{4p+5} s'obtiennent de même et sont bien ceux attendus.

(b) ⋄ D'après les tablaux ci-dessus, $\left\|A_{2n}\right\|_\infty^{[0,1]} = \max\left(\left|a_{2n}\right|, \left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right)$.

Or pour $n \geqslant 1$, $\left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right)\left|a_{2n}\right| < \left|a_{2n}\right|$ donc $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in [0\,;1]$, $\left|A_{2n}(x)\right| \leqslant \left|a_{2n}\right|$.

⋄ Puisque $A_{2n+1}(1-x) = -A_{2n+1}(x)$, on a $\left\|A_{2n+1}\right\|_\infty^{[0,1]} = \left\|A_{2n+1}\right\|_\infty^{[0,1/2]}$. Mais si $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$,
$\left|A_{2n+1}(x)\right| = \left|A_{2n+1}(0) + \int_0^x A_{2n}(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^x A_{2n}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x\left\|A_{2n}\right\|_\infty^{[0,1]}$ car $a_{2n+1} = 0$ si $n \geqslant 1$.

Ainsi $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in [0\,;1]$, $\left|A_{2n+1}(x)\right| \leqslant \dfrac{\left|a_{2n}\right|}{2}$.

III.B Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1. (a) Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ (on peut en fait partir de 0) que :

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1}\Big[A_j(t) f^{(j)}(t)\Big]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pour $q = 0$, la formule se réduit à $f(1) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$ qui est vraie.

Si elle est vraie pour q,alors, par intégration par parties,

$$\int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 A'_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \Big[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

et on obtient la formule pour $q+1$.

(b) Puisque $A_1(0) = -A_1(1) = -\frac{1}{2}$ et pour $k \geqslant 1$, $A_{2k}(1) = A_{2k}(0)$ et $A_{2k+1}(1) = A_{2k+1}(0) = 0$, on en déduit, pour tout $p \geqslant 0$:

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\big(f'(1) + f'(0)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\Big) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

III.B.2. ⋄ En appliquant le résultat précédent à $f_k\colon t \mapsto f(k+t)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \frac{1}{2}\big(f'(k+1) + f'(k)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\Big) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\big(f'(k+1) + f'(k)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\Big) - \int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc, en sommant entre n et N, par télescopage,

$$(*) \qquad f(N+1) - f(n) = \sum_{k=n}^{N} f'(k) + \frac{1}{2}\big(f'(N+1) - f'(n)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\Big) - \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

En notant ε_p le signe (constant) de $f^{(2p+2)}$ sur $[n\,;+\infty[$,

$$\forall t \in [n, +\infty[,\ \left|A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\right| \leqslant \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} \varepsilon_p\, f^{(2p+2)}(t),$$

et :

$$\int_n^x \left|f^{(2p+2)}(t)\right|\,\mathrm{d}t = \varepsilon_p \int_n^x f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(2p+1)}(x) - f^{(2p+1)}(n) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -f^{(2p+1)}(n)$$

ce qui montre l'intégrabilité de $f^{(2p+2)}$ donc de $A^*_{2p+1} f^{(2p+2)}$ sur $[n\,;+\infty[$. En écrivant alors $(*)$ sous la forme :

$$\sum_{k=n}^{N} f'(k) = f(N+1) - f(n) - \frac{1}{2}\big(f'(N+1) - f'(n)\big) + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\Big) + \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

et puisque selon les hypothèses, pour tout j, $f^{(j)}(N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ceci montre la convergence de $\sum\limits_{k\geqslant n} f'(k)$ et donne, à la limite,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

◇ L'inégalité vue plus haut donne

$$\left|\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} \varepsilon_p \int_n^{+\infty} f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = -\varepsilon_p \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} f^{(2p+1)}(n)$$

donc , avec le résultat de **A.3.b**, et vu que le signe du majorant est positif,

$$\left|\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|a_{2p}|}{2} \left|f^{(2p+1)}(n)\right|\,.$$

III.B.3. En appliquant la formule ci-dessus à $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ au rang $p-1$, ce qui est légitime car, comme on a vu au **II.B.1**, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout $[n\,;+\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f \leqslant 0$, et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{x^{\alpha+n-1}}$$

est du signe de $(-1)^{n-1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

$$\int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).$$

IV Compléments sur l'erreur

IV.A Encadrement de l'erreur

IV.A.1. Si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors selon **III.A.3.a**, $A_n \leqslant 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $A_n \geqslant 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Donc, l'inégalité : $\forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g(t) \leqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$, implique : $\forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$. De même, $\forall\, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$ implique : $\forall\, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$.

On a donc : $\forall\, t \in [0,1]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$ donc $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ car $n \geqslant 1$.

Le cas $n \equiv 3 \bmod 4$ se traite de la même façon.

On peut d'ailleurs résumer les deux cas en :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ (-1)^p \int_0^1 A_{2p+1}(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0\,.$$

IV.A.2. ◇ Par définition (vue au **II.B.2**) et d'après [**III.B.3**], on a pour $p \geqslant 1$,

$$\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) = S(\alpha) - R_n(\alpha) - f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) = S(\alpha) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Or :

$$\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,\mathrm{d}t\,,$$

et, en posant, pour $t \in [0\,;1]$, $g_k(t) = f^{(2p+2)}(t+k)$, on a $g_k'(t) = f^{(2p+3)}(t+k) \geqslant 0$ (voir **III.B.3**) donc on peut appliquer le résultat de **IV.A.1**.

On obtient que pour tout $k \geqslant n$, $\displaystyle\int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,\mathrm{d}t$ est du signe de $(-1)^p$ et donc $S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ est également du signe de $(-1)^p$.

Ceci donne donc $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$et $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$.

◇ Donc $0 \leqslant S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) = -a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n)$ d'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\right| \leqslant \left|a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n)\right|$ et $-a_{4p} f^{(4p)}(n) = \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) \leqslant S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) \leqslant 0$ d'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)\right| \leqslant \left|a_{4p} f^{(4p)}(n)\right|$.

On a ainsi traité les cas $q = 2p$ et $q = 2p-1$, donc $\forall\, q \geqslant 1$, $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2q}\right| \leqslant \left|a_{2q+2} f^{(2q+2)}(n)\right|$.

IV.A.3. On a donc $\left|S(3)-\widetilde{S}_{100,4}(3)\right| \leqslant \left|a_6 f^{(6)}(100)\right|$. Or $f^{(6)}(x)=(-1)^5\dfrac{3\times4\times5\times6\times7}{x^8}=-\dfrac{7\times6!}{2\,x^8}$ (voir **III.B.3**) et $a_6=\dfrac{1}{42.6!}$ donc $\left|S(3)-\widetilde{S}_{100,4}(3)\right| \leqslant \dfrac{1}{12}\,10^{-16}<10^{-17}$.

IV.B Séries de Fourier

Résultats admis, les séries de Fourier n'étant plus au programme.

IV.C Comportement de l'erreur

IV.C.1. Pour $p\geqslant 1$, on a

$$f^{(2p)}(n)=-\frac{\alpha\cdots(\alpha+2p-2)}{n^{\alpha+2p-1}}$$

et

$$f^{(2p+2)}(n)=-\frac{\alpha\cdots(\alpha+2p-2)(\alpha+2p-1)(\alpha+2p)}{n^{\alpha+2p+1}}=\frac{(\alpha+2p-1)(\alpha+2p)}{n^2}f^{(2p)}(n)\,,$$

et, avec **B.4**, $\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right|=\dfrac{(\alpha+2p-1)(\alpha+2p)\,S(2p+2)}{4n^2\pi^2\,S(2p)}$.

IV.C.2. L'encadrement du **I.A.3** montre que $S(\alpha)\underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow}1$ donc, à n fixé, $\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right|\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et notamment, il existe p_0 tel que $\forall\,p\geqslant p_0$, $\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right|>1$ et donc dans l'écriture

$$\widetilde{S}_{n,2p}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}-f(n)+\frac{1}{2}f'(n)-\sum_{j=1}^{p}a_{2j}f^{(2j)}(n)\,,$$

la dernière somme est somme partielle d'une série (alternée) grossièrement divergente.

On en conclut que n étant fixé, la suite $\left(\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right)_{p\geqslant1}$ ne converge pas vers $S(\alpha)$ quand p tend vers $+\infty$.

Il faut donc choisir simultanément p et n pour que la majoration obtenu au **A.2** soit la meilleure, c'est-à-dire $\left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right|$ le plus petit possible.