ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Problème d'analyse

I. TRANSFORMATION D'ABEL

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nb_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Vérifier que $B_0 = b_0$ et $\forall\ n \geqslant 1,\ b_n = B_n - B_{n-1}$.

   (b) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_k = a_nB_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k$.

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (a) Montrer que la suite $(a_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) On suppose de plus que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente ; montrer alors que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})B_n$ est absolument convergente et en déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nb_n$.

3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nb_n$ converge.

4. Énoncez et démontrez un critère garantissant la convergence d'une série alternée.

II. APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin(kx) \text{ et } C_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\cos(kx).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\, e^{ix},$$

et que
$$\frac{1}{2}+C_n(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad S_n(x)=\frac{\sin(n\frac{x}{2})\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

2. En déduire alors que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Dans la suite on pose $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$, $x\in\mathbb{R}$, et on cherche à calculer la somme de cette série.

3. (a) Vérifier que f est impaire et 2π-périodique.
   (b) Soit $x\in]0,\pi[$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}=\frac{\pi-x}{2}-\frac{1}{2}\int_x^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt.$

4. Soit $x\in]0,\pi[$; pour tout $t\in[x,\pi]$, on pose $h(t)=\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$.
   (a) Vérifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,\pi]$ et que h' y est bornée.
   (b) Montrer la formule
$$\int_x^{\pi}h(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}+\int_x^{\pi}h'(t)\cos(n+\frac{1}{2})t\,dt\right).$$
   (c) En déduire un majorant pour la valeur absolue de l'intégrale du premier membre et conclure que cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Établir alors que pour tout $x\in]0,2\pi[$, $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$.

III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente.

1. Soit $x\in]0,2\pi[$.
   (a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel (**I. 1.**), que pour tout couple (m,n) d'entiers naturels tels que $1\leqslant m<n$, on a
$$\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}=\frac{S_n(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}S_p(x)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)-\frac{S_m(x)}{m+1}.$$
   (b) En déduire que
$$\left|\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}\right|\leqslant\frac{2}{(m+1)\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et que} \quad \left|\sum_{p=m+1}^{+\infty}\frac{\sin(px)}{p}\right|\leqslant\frac{2}{(m+1)\sin(\frac{x}{2})}.$$

2. Soit $x\in]0,\pi]$. On note k la partie entière de $\frac{\pi}{x}$: $k=E(\frac{\pi}{x})$; on a donc $k\geqslant 1$.
   (a) Montrer que $0\leqslant\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{\sin(px)}{p}\leqslant kx\leqslant\pi$.

(b) Montrer que si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$.

(c) Soit $n \geqslant k+1$; Montrer alors que $\left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2$.

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2+\pi.$$

IV. CALCUL DE LA SOMME D'UNE SÉRIE

Soit g une fonction réelle, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. On pose

$$M = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |g(t)| \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\,dt, \ n \geqslant 1.$$

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} b_n^2$.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{b_n}{n}$ est absolument convergente.

   On cherche à calculer la somme de cette dernière série.

3. (a) Vérifier que

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) dt.$$

   (b) En déduire que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - \sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) g(t)\,dt.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0, \pi[$ tels que $(2+\pi+\frac{\pi}{2})\delta M/\pi < \varepsilon/3$.

   (a) Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\delta}\left(f(t) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) g(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon/3 \quad \text{et que} \quad \frac{1}{\pi}\left|\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\left(f(t) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) g(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon/3.$$

   (b) Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left(f(t) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{4M}{(n+1)\sin(\frac{\delta}{2})}.$$

   (c) Déduire de ce qui précède que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

FIN DE L'ÉPREUVE