PROBLÈME II (*CCP MP 2015, extrait*).

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On admettra le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur un segment $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$:

> Si f est une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, il existe une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a\,;b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème. Les trois parties sont indépendantes.

I. Exemples et contre-exemples

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par : $\forall x \in]0\,;1],\ h(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0\,;1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

2. Montrer que si une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est une fonction polynôme.

Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

3. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.
Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sup\limits_{x\in[-2;-1]} |P(x)|$ et $N_2(P) = \sup\limits_{x\in[1;2]} |P(x)|$.

a) Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

b) On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ ainsi :

pour tout $x \in [-2\,;-1]$, $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $f(x) = 1$ et
pour tout $x \in [1\,;2]$, $f(x) = x^3$.

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2\,;2]$.

Démontrer que cette suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

II. Application : un théorème des moments

1. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$). On suppose que :

$$\text{pour tout entier naturel } k, \int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

($\displaystyle\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x$ s'appelle le moment d'ordre k de f sur $[a\,;b]$).

a) Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\,\mathrm{d}x$?

b) Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle.

2. *Application*

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple $(f,\ g)$ d'éléments de E par : $\langle f\,|\,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a\,;b]$ et $F^{\perp}$ l'orthogonal de F. Déterminer $F^{\perp}$. A-t-on $E = F \oplus F^{\perp}$?

3. a) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout entier n, $I_n = \dfrac{n!}{(1-\mathrm{i})^{n+1}}$ ·

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k}\mathrm{e}^{-x}x^3 \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

c) Proposer une fonction f continue sur $[0\,;+\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k, \int_0^{+\infty} u^k f(u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

d) Expliquer pourquoi la fonction f proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0\,;+\infty[$ par une suite de polynômes.

III. Une approximation polynomiale de $x \mapsto \sqrt{x}$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right).$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(P_n(x) + \sqrt{x}\right)\right).$$

Exprimer de même $P_{n+1}(x) + \sqrt{x}$ en fonction de $P_n(x) + \sqrt{x}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$.

3. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;1]$ vers $f : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$.

4. Donner le sens de variation des fonctions $\varphi_n : x \mapsto P_n(x) - \sqrt{x}$ et $\psi_n : x \mapsto P_n(x) + \sqrt{x}$ sur $[0\,;1]$.

5. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0\,;1]$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆