# CORRIGÉ PROBLÈME II (*CCP MP 2015, extrait, modifié*).

## I. Exemples et contre-exemples

**1.** Supposons qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;1]$. Vu que les polynômes $P_n$ possèdent tous une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $x \to 0^+$, on peut appliquer le théorème de la double limite, ce qui a pour conséquence que $h$ possède une limite (finie) en $0^+$, et cela est contradictoire. Une telle suite de polynômes n'existe donc pas.

*Autre solution possible : on pouvait aussi utiliser le résultat du cours qui affirme que si une suite de fonctions bornées sur $I$ converge uniformément sur $I$, la fonction limite est bornée sur $I$.*

Ce résultat illustre le fait qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse « fermé » de l'intervalle $[a\,;b]$ dans le théorème de Weierstrass.

**2.** Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$. Par définition, on a en particulier :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|P_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Par l'inégalité triangulaire on en déduit, pour $n \geqslant n_0$ :

$$\|P_n - P_{n_0}\|_\infty \leqslant \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_{n_0}\|_\infty \leqslant 1\,.$$

Les polynômes $P_n - P_{n_0}$ étant bornés sur $\mathbb{R}$, ils sont constants : pour tout $n \geqslant n_0$ il existe un réel $\lambda_n$ tel que $P_n = P_{n_0} + \lambda_n$.
On a alors $\lambda_n = P_n(0) - P_{n_0}(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0) - P_{n_0}(0) = \lambda$.

En passant alors à la limite dans la relation $P_n = P_{n_0} + \lambda_n$, on obtient $f = P_{n_0} + \lambda$ : $f$ est un polynôme.

Ce résultat illustre le fait qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse « borné » de l'intervalle $[a\,;b]$ dans le théorème de Weierstrass (puisqu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas un polynôme ne peut être limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes d'après ce qui précède).

**3. a)** L'application $N_1$ est bien définie (car tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est continu, donc borné sur le segment $[-2\,;-1]$), et clairement à valeurs positives. De plus :

– Si $N_1(P) = 0$, alors $\sup\limits_{[-2;-1]} |P| = 0$, ce qui signifie que la fonction positive $|P|$ est nulle sur le segment $[-2\,;-1]$. Le polynôme $P$ possède alors une infinité de racines, ce qui entraîne $P = 0$.

– Pour tout $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$, on a :

$$N_1(\lambda P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda P|(x) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda||P(x)| = |\lambda| \times \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)|$$

(car la constante $|\lambda|$ est positive). Donc $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$ .

– Pour tous polynômes $P, Q$ et pour tout $x \in [-2\,;-1]$, on a :

$$|P+Q|(x) = |P(x) + Q(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)| \leqslant N_1(P) + N_1(Q),$$

puisque $|P(x)| \leqslant N_1(P)$ et $|Q(x)| \leqslant N_1(Q)$).
Le réel $N_1(P) + N_1(Q)$ est un majorant de l'ensemble $\{|P+Q|(x),\ x \in [-2\,;-1]\}$, il est donc plus grand que la borne supérieure de cet ensemble, c'est-à-dire :

$$N_1(P) + N_1(Q) \geqslant \sup\{|P+Q|(x),\ x \in [-2\,;-1]\} = N_1(P+Q)\,.$$

L'application $N_1$ est donc bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

**b)** . Représentation graphique de $f$ sans problème ni intérêt.

La fonction $f$ étant continue sur $[-2\,;2]$ (vérification facile), il existe, d'après le théorème de Weierstrass, une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[-2\,;2]$.

Cela signifie que $\sup\limits_{x\in[-2;2]} |P_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

En outre, en considérant la fonction polynomiale $f_1 : x \mapsto x^2$ (qui coincide avec $f$ sur $[-2\,;-1]$), on a :

$$N_1(P_n - f_1) = \sup_{x\in[-2;-1]} |P_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[-2;2]} |P_n(x) - f(x)|,$$

donc on a aussi $N_1(P_n - f_1) \to 0$, ce qui prouve que dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_1)$ , la suite $(P_n)$ converge vers le polynôme $X^2$.
De faąon similaire, dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_2)$ , la même suite $(P_n)$ converge vers le polynôme $X^3$.

# II. Application : un théorème des moments

**1. a)** Par linéarité de l'intégrale sur un segment, l'hypothèse : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b x^k f(x)dx = 0$, entraîne que $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ pour tout polynôme $P$.

**b)** Considérons une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[a\,;b]$ (une telle suite existe d'après le théorème de Weierstrass puisque $f$ est continue).

D'après la question précédente, on a $\displaystyle\int_a^b P_n(x)f(x)dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, $\displaystyle\int_a^b P_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$, puisque :

$$\left|\int_a^b \big(P_n(x)f(x) - f^2(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,|P_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty^{[a;b]}\,\|P_n - f\|_\infty .$$

On en déduit donc, en faisant tendre $n \to +\infty$, que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Cela entraîne la nullité de $f^2$ sur $[a\,;b]$ (puisque $f^2$ est continue et positive), et donc la nullité de $f$.

**2.** L'ensemble $F^\perp$ est formé des fonctions $f \in \mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ qui vérifient $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ pour tout fonction polynomiale $P$.
D'après la question précécédente, seule la fonction nulle $f = 0$ vérifie cette condition. On a donc $F^\perp = \{0_E\}$, donc $F \oplus F^\perp = F$.
Puisque $F \neq E$ (il existe des fonctions continues non polynomiales), on a donc $F \oplus F^\perp \neq E$.
*Remarque : cet exemple montre aussi que l'on n'a pas toujours* $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ *).*

**3. a)** – Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-(1-i)x}$ est continue (à valeurs complexes) sur $\mathbb{R}_+$, et on a $|x^n e^{-(1-\mathrm{i})x}| = x^n \mathrm{e}^{-x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2|x^n\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}| = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparée, ce qui montre que $|x^n \mathrm{e}^{-(1-i)x}|$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable (puisque la fonction positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$).
Ceci montre que l'intégrale $I_n$ est absolument convergente, donc convergente.

– Ensuite, on fait une intégration par parties à partir de $I_{n+1}$, en dérivant $x \mapsto x^{n+1}$ et en intégrant $x \mapsto \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}}{-(1-\mathrm{i})}x^{n+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{1-\mathrm{i}}\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}dx,$$

et cette intégration par parties est justifiée car

$$\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}}{-(1-\mathrm{i})}x^{n+1}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})X}}{-(1-\mathrm{i})}X^{n+1} = 0$$

puisque $\left|\dfrac{e^{-(1-\mathrm{i})X}}{-(1-\mathrm{i})}X^{n+1}\right| = \dfrac{X^{n+1}e^{-X}}{\sqrt{2}}X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
On obtient donc la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \dfrac{n+1}{1-\mathrm{i}}I_n$.

– On en déduit par récurrence sur $n$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{n!}{(1-\mathrm{i})^{n+1}}$.

En effet, c'est vrai pour $n = 0$ (puisque $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}}{-(1-\mathrm{i})}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-\mathrm{i}}$) , et si pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $I_n = \dfrac{n!}{(1-\mathrm{i})^{n+1}}$, alors

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{1-\mathrm{i}}I_n = \frac{n+1}{1-\mathrm{i}} \times \frac{n!}{(1-\mathrm{i})^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(1-\mathrm{i})^{n+2}}\,.$$

**b)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathcal{I}m\,(x^{4k+3} e^{-(1-\mathrm{i})x}) dx = \mathcal{I}m\,(I_{4k+3}).$$

Or, d'après les formules établies précédemment, puisque $(1-\mathrm{i})^4 = -4$, $I_{4k+3} = \dfrac{(4k+3)!}{(-4)^{k+1}}$, et la partie imaginaire de $I_{4k+3}$ est nulle. On en déduit la nullité de l'intégrale considérée.

**c)** Effectuons le changement de variable $u = x^4$ dans l'intégrale impropre convergente précédente. L'application $x \mapsto x^4$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} \mathrm{e}^{-x} x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} u^k \sin(u^{1/4}) \mathrm{e}^{-u^{1/4}} \,\mathrm{d}u.$$

En posant $f(u) = \sin(u^{1/4}) e^{-u^{1/4}}$ pour tout $u \geqslant 0$, on définit une fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$ qui est non nulle et dont tous les moments sont nuls.

*Remarque : on en conclut que le théorème des moments démontré à la question II.1.. ne se généralise donc pas aux intervalles non compacts.*

**d)** Supposons que $f$ soit limite uniforme sur $\mathbb{R}_+$ d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .
Nous avons alors $\|P_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leqslant 1$ pour $n$ supérieur à un certain rang $N \in \mathbb{N}$, ce qui implique

$$\forall\, n \geqslant N,\ \forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ |P_n(x)| \leqslant 1 + |f(x)|\,.$$

Mais la fonction limite $f$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (car elle est continue et tend vers 0 en $+\infty$, puisque $|f(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-u^{1/4}}$). On en déduit que pour tout $n \geqslant N$, le polynôme $P_n$ est borné sur $\mathbb{R}_+$, donc constant (puisqu'un polynôme de degré $\geqslant 1$ a une limite infinie en $+\infty$).
Ainsi, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a (par convergence simple de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f$ :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(0) = f(0),$$

ce qui entraîne que $f$ est constante : contradiction.

La fonction $f$ n'est donc pas une limite uniforme de polynômes sur $[0\,;+\infty[$

# III. Une approximation polynomiale de $x \mapsto \sqrt{x}$

**1.** On développe le second membre de l'égalité et on trouve le premier, en utilisant la relation de récurrence de l'énoncé.

On trouve de même :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) + \sqrt{x} = \big(P_n(x) + \sqrt{x}\big)\left(1 - \frac{1}{2}\big(P_n(x) - \sqrt{x}\big)\right).$$

*Remarque : cette question est une indication pour la suite ; elle n'était pas notée...*

**2.** Procédons par récurrence sur $n$.
Pour $n = 0$ on a bien sûr $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0\,;1]$.
Supposons alors $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$ à un certain rang $n$. On obtient alors

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\underbrace{\big(x - P_n^2(x)\big)}_{\geqslant 0} \geqslant P_n(x) \geqslant 0.$$

De plus, on a $\dfrac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2} \leqslant 1$, donc

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \big(P_n(x) - \sqrt{x}\big)\big(1 - \frac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2}\big) \leqslant 0.$$

Ainsi, on a par récurrence la double inégalité voulue.

**3.** Pour $x \in [0\,;1]$ fixé, on a $P_{n+1}(x) \geqslant P_n(x)$ puisque $x - (P_n(x))^2 \geqslant 0$ par la question précédente. Ainsi, la suite $\big(P_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{x}$, elle converge donc ; notons $f(x)$ sa limite. En injectant dans la relation de récurrence définissant $P_{n+1}$, on obtient :

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}\big(x - f(x)^2\big),$$

donc $f^2(x) = x$ ; or les $P_n$ sont positifs donc $f(x)$ aussi d'où $f(x) = \sqrt{x}$ et on a donc convergence simple sur $[0\,;1]$ de la suite $(P_n)$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

**4.** Procédons par récurrence sur $n$ pour montrer que chaque fonction $\varphi_n$ est décroissante et que chaque fonction $\psi_n$ est croissante (on démontre les deux propriétés en même temps).

- C'est immédiat pour $n = 0$.
- Si cette propriété est vérifiée au rang $n$, alors les relations

$$\psi_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\varphi_n\right)\psi_n \quad \text{et} \quad \phi_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\psi_n\right)\phi_n\,,$$

qui résultent de la question 1., permettent de démontrer le résultat à l'ordre $n+1$ (attention aux signes...)

**5.** Par décroissance de $\varphi_n$, on a :

$$\forall\, x \in [0\,;1],\ P_n(1) - 1 \leqslant P_n(x) - \sqrt{x} \leqslant 0\,,$$

donc $\|P_n - f\|_\infty^{[0;1]} \leqslant |P_n(1) - 1|$. Or $P_n(1)$ tend vers 1 quand $n \to \infty$, ce qui montre la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f$ sur $[0\,;1]$.