PROBLÉME I (extrait de E3A MP 2014)

On étudie dans ce problème quelques propriétés des fonctions de Bessel, obtenues à partir de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

où α est un paramètre réel positif.

Partie I

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.

2. Pour deux réels A et B, déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto A\cos x + B\sin x$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction

$$x \mapsto \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$$

admette une limite finie en 0^+. Cette condition étant satisfaite, donner un équivalent de $\dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0^+.

Partie II

On considère dans cette partie l'équation différentielle :

$$(E_{\frac{1}{2}}) \qquad x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$?

5. Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et soit z la fonction définie par :

$$z : \left\{ \begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{\frac{1}{2}}y(x) \end{array} \right.$$

Démontrer que y est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

6. Résoudre l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

7. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0\,;+\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0 est un espace vectoriel de dimension 1.

8. Démontrer qu'il existe une unique solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0\,;+\infty[$, notée $f_{\frac{1}{2}}$; telle que :

$$f_{\frac{1}{2}}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,.$$

Partie III

Dans cette partie, α est un réel fixé, $\alpha \geqslant 0$, et on considère les équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} (E_\alpha) & x^2y'' + xy' + (x^2-\alpha^2)y = 0 \\ (E'_\alpha) & xz'' + (2\alpha+1)z' + xz = 0\,. \end{array}$$

9. On rappelle la définition de la fonction Γ :

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Démontrer que $\Gamma(1) = 1$ et, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

10. On considère une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence est noté R et dont la somme sur l'intervalle $]-R\,;R[$ est notée S. On suppose dans cette question que R est strictement positif.

a) Rappeler une définition du rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

b) On suppose dans cette question que S est solution de l'équation différentielle (E'_α) sur $]-R\,;R[$. Démontrer que $a_1 = 0$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)(n+1+2\alpha)a_{n+1} + a_{n-1} = 0\,.$$

11. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait les deux conditions obtenues à la question précédente.

a) Démontrer que $a_{2n+1} = 0$ pour tout n.

b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

c) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}\,a_0\,.$$

12. Préciser la nature de l'ensemble des solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_α).

13. Soit $y\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On définit la fonction z :

$$z : \left\{ \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{-\alpha}y(x) \end{array} \right.$$

Démontrer que y est solution de (E_α) sur $]0\,;+\infty[$ si et seulement si z est solution de (E'_α) sur $]0\,;+\infty[$.

14. En déduire que la fonction f_α définie sur $]0\,;+\infty[$ en posant :

$$\forall x > 0,\ f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^{2n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}\,x^{2n+\alpha}$$

est solution de (E_α) sur $]0\,;+\infty[$.

15. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0.

Dans la suite du problème, on considère le cas particulier où $\alpha = p$ est un entier naturel et f_p est la solution de (E_p) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

(insistons sur le fait que cette fonction f_p est définie sur $\mathbb{R}$).

16. Pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout réel x, expliciter $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x)$ comme somme d'une série entière.

En déduire l'existence d'une constante k que l'on précisera telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) = k f_p'(x)\,.$$

Partie IV

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}$ est un entier naturel fixé et on considère la fonction f_p définie dans la partie précédente. On définit également une fonction g_p sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t\,.$$

17. Démontrer que g_p est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter (sous forme d'une intégrale) les fonctions g_p' et g_p''.

18. En intégrant par parties $g_p'(x)$, vérifier que g_p est solution de l'équation différentielle (E_p).

19. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $n w_n = (n-1) w_{n-2}$.

b) Donner l'expression de w_{2n} en fonction de n.

20. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t.\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t\,,$$

puis démontrer que g_0 et g_1 sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

21. Démontrer les égalités de fonctions $g_0 = f_0$ et $g_1 = f_1$.

22. Démontrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = 2 g_p'(x)\,.$$

23. Démontrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ les fonctions f_p et g_p sont égales.