PROBLÉME I (extrait de E3A MP 2014)

Partie I

1. Les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $z'' + z = 0$ forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 ; ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos x + B\sin x$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. On a immédiatement : $A\cos x + B\sin x = A + Bx + o(x)$ au voisinage de 0.

3. On en déduit que, si $A \neq 0$, alors $\dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{A}{\sqrt{x}}$ en 0^+, et donc a en 0^+ une limite infinie.

Si, par contre, $A = 0$, alors $\dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}} = B\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ en 0^+, donc a pour limite 0 en 0^+.
La condition demandée est donc : $A = 0$.

Si $A = 0$ et $B \neq 0$, le développement asymptotique précédent donne $B\sqrt{x}$ comme équivalent en 0^+ ; si $B = 0$, la fonction est la fonction nulle.

Partie II

4. L'équation $(E_{1/2})$ est linéaire et homogène, l'ensemble de ses solutions est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, c'est une équation du second ordre, et le coefficient x^2 de y'' ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[$; l'espace des solutions est donc de dimension 2 (conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz).

5. Pour tout $x > 0$, on a $y(x) = x^{-1/2}z(x)$, donc $y'(x) = -\dfrac{x^{-3/2}}{2}z(x) + x^{-1/2}z'(x)$, puis

$$y''(x) = \frac{3x^{-5/2}}{4}\,z(x) - x^{-3/2}z'(x) + x^{-1/2}z''(x)\,.$$

En substituant dans $(E_{1/2})$, on obtient après calculs :

$$y \text{ est solution de } (E_{1/2}) \iff \forall\, x > 0,\ x^{3/2}z''(x) + x^{3/2}z(x) = 0\,.$$

Puisqu'on se restreint à $]0\,;+\infty[$, on peut simplifier par $x^{3/2}$; l'équation cherchée est donc l'équation $z'' + z = 0$ étudiée en **I**.

6. Compte tenu de **6.** et **1.**, les solutions à valeurs réelles de $(E_{1/2})$ sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

7. D'après **3.**, les fonctions cherchées sont les fonctions de la forme $x \mapsto Bx^{-1/2}\sin x$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}\sin x$.

8. Une fonction vérifiant la condition posée a pour limite 0 en 0, donc doit vérifier $A = 0$; le **3.** montre alors que la seule solution est la fonction obtenue en prenant $A = 0$ et $B = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Partie III

9. Fait en classe.

10. **a)** Par exemple, R est la borne supérieure de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}_+$ pour lesquels la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (ou pour lesquels $(a_n x^n)$ tend vers 0, ou pour lesquels la série $\sum a_n x^n$ converge …)

b) Puisque S est solution de (E'_α) sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $x \in]-R\,;R[$,

$$x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + (2\alpha+1)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = 0$$

soit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + (2\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$ (changements d'indices)

d'où : $\displaystyle (2\alpha+1)a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big[(n+1)(n+2\alpha+1)a_{n+1} + a_{n-1}\big]x^n = 0\,.$

L'égalité étant vérifiée pour tout $x \in]-R\,;R[$, l'unicité du développement en série entière montre que les coefficients de la série entière du membre de gauche de la dernière équation, sont tous nuls, ce qui fournit les relations demandées par l'énoncé ($2\alpha+1 \neq 0$).

11. a) Puisque $\alpha \geqslant 0$ par hypothèse, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n+1} = \dfrac{-a_{2n-1}}{(2n+1)(2n+1+2\alpha)}$, et puisque $a_1 = 0$, une récurrence immédiate montre que les coefficients d'indice impair sont tous nuls.

b) On a de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{2n+2} = \dfrac{-a_{2n}}{4(n+1)(n+1+\alpha)}$.

Si $a_0 = 0$, les coefficients d'ordre pair sont eux aussi tous nuls, la série est la série nulle et son rayon de convergence est infini.
Si $a_0 \neq 0$, il est clair que $a_{2n} \neq 0$ pour tout n. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}x^{2(n+1)}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \frac{|x|^2}{4(n+1)(n+1+\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

et donc, par la règle de d'Alembert, la série $\sum a_{2n}x^{2n}$ converge absolument. Ceci étant vrai pour tout x, le rayon de convergence R est donc infini.

c) Le résultat demandé est vrai pour $n = 0$; le résultat général s'en déduit par récurrence, en utilisant la relation de récurrence donnée en **b.** et la relation $\Gamma(n+\alpha+2) = (n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)$.

12. Idem qu'à la question **4.** : l'ensemble des solutions est un plan vectoriel.

13. Idem qu'à la question **5.** ; on remplace y par $x^\alpha z$ dans l'équation (E_α), et après simplification par $x^{\alpha+1}$ (légitime puisqu'on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$), on obtient l'équation (E'_α).

14. Soit (a_n) la suite définie par les conditions du **10.b** et $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$.
La question **11.** montre que S est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et la question **10.** qu'elle y est solution de l'équation (E'_α).
Enfin, la question **11.c** montre que $S(x) = x^{-\alpha}f_\alpha(x)$ pour tout $x > 0$; d'après **13.**, la fonction f_α est donc solution de (E_α) sur $\mathbb{R}_+^*$.

15. Avec les notations précédentes, la fonction S, somme d'une série entière, a pour limite $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$ en 0 ; puisque $a_0 \neq 0$, on en déduit :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha S(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\,.$$

16. Soient $p \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Le changement d'indice $n' = n+1$ donne :

$$f_{p+1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p+1)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n+p+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-(-1)^n}{(n-1)!(n+p)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n+p-1}\,.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} \\ &= \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} \end{aligned}$$

D'autre part : $f_p'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}$ (le facteur $\frac{1}{2}$ vient de la dérivation de $\frac{x}{2}$).

On a donc finalement : $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) = 2f_p'(x)$.

Partie IV

17. Pour $(t,x) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}$, on pose $h(t,x) = \cos(pt - x\sin t)$. Alors :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(t,x)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0\,;\pi]$;
- pour tout $t \in [0\,;\pi]$, la fonction $x \mapsto h(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x) = \sin t.\sin(pt - x\sin t)$ est continue (par morceaux) sur $[0\,;\pi]$;
- pour tout $(t,x) \in [0\,;\pi]\times\mathbb{R}$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant 1$, et la fonction constante égale à 1 est continue et intégrable sur $[0\,;\pi]$.

Le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre permet de conclure que g_p est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_p'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t.\sin(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On montre de même que g_p' est de classe $\mathscr{C}^1$, donc que g_p est de classe $\mathscr{C}^2$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_p''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\cos(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t\,.$$

18. Soit $p \in \mathbb{N}$. On vérifie facilement que $g_p(0) = 0$, donc que g_p vérifie (E_p) en $x = 0$. Pour $x \neq 0$, effectuons une intégration par parties dans $g_p'(x)$, en primitivant le facteur $\sin t$ et en conservant une constante d'intégration C :

$$\begin{aligned} \pi g_p'(x) &= \big[(C + \cos t)\sin(pt - x\sin t)\big]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi (\cos t + C)(p - x\cos t)\cos(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^\pi (\cos t + C)\Big(\frac{p}{x} - \cos t\Big)\cos(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En prenant maintenant $C = \dfrac{p}{x}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi g_p'(x) &= \frac{p^2}{x}\int_0^\pi \cos(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^\pi \cos^2 t.\cos(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi p^2}{x}\,g_p(x) - x\int_0^\pi \cos(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t + x\int_0^\pi \sin^2 t.\cos(pt - x\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{x}(p^2 g_p(x) - x^2 g_p(x) - x^2 g_p''(x)) \end{aligned}$$

et donc g_p est solution de (E_p).

19. Intégrales de Wallis !

a) Soit $n \geqslant 2$. On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} w_n = \int_0^\pi \sin t.\sin^{n-1} t \,\mathrm{d}t &= \big[-\cos t \sin^{n-1} t\big]_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \cos^2 t \sin^{n-2} t\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} t\,\mathrm{d}t - (n-1)\int_0^\pi \sin^n t\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

d'où l'on tire immédiatement la relation cherchée.

b) On en déduit, pour tout $n \geqslant 1$:

$$w_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\,w_0 = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$$

ce qui pourrait se justifier évidemment par une récurrence simple.

20. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0\,;\pi]$. On a $\cos(t - x\sin t) = \cos t.\cos(x\sin t) + \sin t.\sin(x\sin t)$.
Or le terme $\cos t.\cos(x\sin t)$ est de la forme $u'.\cos u$; plus précisément, pour $x \neq 0$:

$$\int_0^\pi \cos t.\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{x}\sin(x\sin t)\Big]_0^\pi = 0\,,$$

et ce résultat demeure vrai pour $x = 0$, ce qui fournit l'expression demandée pour g_1.

D'autre part, $\pi g_0(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$, et on sait que $\cos(x\sin t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k} t}{(2k)!}$ (développement en série entière de la fonction $\cos$).

Posons $f_k(t) = \dfrac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k} t}{(2k)!}$ pour tout $t \in [0\,;\pi]$.

Les fonctions f_k sont continues par morceaux donc intégrables sur $[0\,;\pi]$ et la série $\sum f_k$ converge simplement sur $[0\,;\pi]$, de somme $\cos(x\sin t)$ continue sur $[0\,;\pi]$. Enfin, on a clairement $|f_k(t)| \leqslant \dfrac{|x|^{2k}}{(2k)!}$ pour tout k et tout t, d'où, pour tout k, $\displaystyle\int_0^\pi |f_k(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi\,|x|^{2k}}{(2k)!}$; donc la série $\sum \int_0^\pi |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, et cela, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le théorème d'intégration terme à terme [1] permet alors d'intervertir intégrale et somme ; autrement dit,

$$\pi g_0(x) = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_0^\pi \sin^{2k} t\,\mathrm{d}t\Big]x^{2k}\,.$$

La question **19.b** donne alors : $g_0(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\,x^{2k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui est le développement en série entière cherché.

On montre de même, à partir de la formule établie au début de cette question, que

$$\pi g_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^\pi \sin^{2k+2} t\ \mathrm{d}t\Big]x^{2k+1}\,.$$

En utilisant de nouveau **19.b**, on obtient alors : $g_1(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\,x^{2k+1}$.

21. Il suffit de comparer les développements en série entière obtenus à la question précédente, à ceux qui ont été donnés en fin de partie **III** pour les fonctions f_p.

22. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a\sin b$. Avec $a = pt - x\sin t$ et $b = t$, cela donne, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin(pt - x\sin t)\sin t\ \mathrm{d}t = 2g_p'(x)\,.$$

1. on pouvait aussi démontrer la convergence normale donc uniforme sur $[0\,;\pi]$ de la série de fonctions $\sum f_k$.

23. L'égalité a déjà été vérifiée aux rangs 0 et 1.
Si elle est vraie jusqu'à un rang $p \geqslant 1$, alors $g_{p+1} = g_{p-1} - 2g'_p = f_{p-1} - 2f'_p$ par hypothèse de récurrence ; la question **16.** montre alors que $g_{p+1} = f_{p+1}$, ce qui achève la récurrence.