CORRIGÉ DM N°2 (INA 1994)

PARTIE I

I.1. Pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= -\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

donc $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

I.2. La série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente, il résulte des théorèmes de comparaison que la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ est convergente.

On en déduit que la *suite* (u_n) converge puisque, pour tout $N \geqslant 2$, $u_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)+u_1$.

I.3.

I.3.a. La fonction ln étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$:

$$\exists c \in\,]k,k+1[\quad \text{tel que} \quad \ln(k+1)-\ln k = \ln' c = \frac{1}{c}$$

ce qui donne l'inégalité demandée puisque $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{k}$ (les inégalités sont même strictes).

Remarque : On pouvait aussi utiliser le principe de comparaison avec une intégrale, en remarquant que, comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

I.3.b.

• La fonction f_k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_k'(x) = \left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{x^2-k(k+1)}{k(k+1)x^2}$
donc, pour $x > 0$, $f_k'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{k(k+1)}$.
Or $\sqrt{k(k+1)} \in [k,k+1]$ puisque $\ln\sqrt{k(k+1)} = \dfrac{1}{2}(\ln(k+1)+\ln k) \in [\ln k, \ln(k+1)]$.
On a donc le tableau de variations suivant (on a seulement calculé $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = f\left(\dfrac{1}{k+1}\right) = 0$) :

x	k		$\sqrt{k(k+1)}$		$k+1$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Rem : *pour étudier le signe de* f_k, *un calcul direct était aussi possible.*

• On en déduit que, pour tout $x \in [k,k+1]$, $f_k(x) \geqslant 0$ ce qui peut aussi s'écrire

$$\forall x \in [k,k+1]\ ,\ \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)(x-k)\cdot$$

En intégrant cette inégalité entre k et $k+1$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\int_k^{k+1}(x-k)\,dx = \frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

ce qui donne l'encadrement cherché (l'autre inégalité ayant déjà été démontrée en **I.3.a**).

I.4. L'inégalité ci-dessus s'écrit aussi

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$$

et en additionnant ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient, après télescopage

$$\ln n \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1$$

et aussi

$$\ln n \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et les deux inégalités précédentes donnent l'encadrement :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n \leqslant 1$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'encadrement : $\dfrac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$.

PARTIE II

II.1. • φ_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \varphi_1'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - x^2(x+1) + (x+1)^2}{x^3(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^3(x+1)^2}\,.\end{aligned}$$

Donc φ_1' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc φ_1 est strictement croissante et, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_1(x) = 0$, on en déduit : $\forall x > 0,\ \varphi_1(x) < 0$.

• φ_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \varphi_2'(x) = \varphi_1'(x) - \frac{2}{x^4} = \frac{x(2x+1) - 2(x+1)^2}{x^4(x+1)^2} = -\frac{3x+2}{x^4(x+1)^2}\,.$$

Donc φ_2' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, donc φ_1 est strictement décroissante et, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_1(x) = 0$, on en déduit : $\forall x > 0,\ \varphi_1(x) > 0$.

II.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} - \dfrac{1}{2n^2} = -\dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2n^2} = \varphi_1(n) = \varphi_2(n) - \dfrac{2}{3n^3}$, donc les inégalités $\varphi_1(n) \leqslant 0$ et $\varphi_2(n) \geqslant 0$ conduisent directement à l'encadrement demandé.

II.3.

II.3.a.

• Pour tout $k \geqslant 1$ on a $\dfrac{1}{k^2} \geqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$ et pour tout $k \geqslant 2$ on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$ (tout simplement puisque $k(k-1) \leqslant k^2 \leqslant k(k+1)$, mais cela peut aussi s'obtenir en comparant $\dfrac{1}{k^2}$ avec les intégrales de la fonction décroissante $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur les intervalles $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$.)

On aura donc pour tout $n \geqslant 1$ (toutes les séries écrites convergent !) :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \geqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{n}$$

et pour tout $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{N}\right)=\frac{1}{n-1}$$

soit en conclusion

$$\forall n\geqslant 2\,,\ \frac{1}{n}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{n-1}\,.$$

• La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^3}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on aura, pour tout $k\geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^3}\leqslant\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^3}$ donc pour tous $N\geqslant n\geqslant 2$, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^3}\leqslant\int_{n-1}^{N}\frac{dt}{t^3}=\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{n-1}^{N}=\frac{1}{2(n-1)^2}-\frac{1}{2N^2}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$ on trouve :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\leqslant\frac{1}{2(n-1)^2}\,.$$

II.3.b. On reprend les inégalités de **II.2** : $\dfrac{1}{2k^2}-\dfrac{2}{3k^3}\leqslant u_k-u_{k+1}\leqslant\dfrac{1}{2k^2}\,.$

que l'on somme directement pour k variant de n à $+\infty$ (cela est possible car il s'agit de trois séries convergentes) :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{2}{3}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\leqslant u_n-\lim_{k\to+\infty}u_k\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

d'où compte tenu de $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=\gamma$ et des inégalités démontrées en **II.3.a** :

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{3(n-1)^2}\leqslant u_n-\gamma\leqslant\frac{1}{2(n-1)}\,.$$

II.4. Pour obtenir de cette façon un encadrement de γ à ε près, il suffit que $\dfrac{1}{2(n-1)}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3(n-1)^2}$ soit inférieur à ε. Cela donne le petit programme (rudimentaire !) suivant :

```python
from math import log

def erreur(n):
    # précison de l'encadrement
    return 0.5/(n*(n-1)) + 1/(3*(n-1)**2)

def gamma(eps):
    n = 2
    while erreur(n) > eps:
        n += 1
    g = sum([1/k for  k in range(1,n+1)]) - log(n)
    return n, g , g- 0.5/(n-1) , g - 0.5/n + 1/(3*(n-1)**2)

eps = 1E-2
n , g , g1 , g2  = gamma(eps)
print( str(g1) + " < gamma < " + str(g2) + " , en " \
       +str(n) + " itérations.\n")
print("Avec le terme correctif de la dernière question : gamma ~ ",  \
      g  - 1/(2*n) + 1/(12*n*(n+1)))
```

```
0.5708276054186523 < gamma < 0.5804983873116564 , en 10 itérations.

Avec le terme correctif de la dernière question : gamma ~  0.5771407367317836
```

PARTIE III

III.1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$ par télescopage.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ puis que

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\,.$$

III.2. Par les méthodes vues en classe pour la décomposition ne éléments simples (ou simplement par réduction au même dénominateur puis « identification »), on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1/2}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1/2}{n+2}\,.$$

On en déduit, pour tout $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\\
&=\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}$$

puis

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2n(n+1)}\,.$$

III.3. On effectue le développement limité de

$$w_n=u_n-u_{n+1}-\frac{\lambda}{n(n+1)}-\frac{\mu}{n(n+1)(n+2)}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}-\frac{\lambda}{n(n+1)}-\frac{\mu}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\begin{aligned}
w_n&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)-\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\frac{\lambda}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\frac{\mu}{n^3}\frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\\
&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\\
&\qquad-\frac{\lambda}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\frac{\mu}{n^3}\left(1-\frac{3}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&=\frac{\frac{1}{2}-\lambda}{n^2}+\frac{-\frac{2}{3}+\lambda-\mu}{n^3}+\frac{\frac{3}{4}-\lambda+3\mu}{n^4}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)
\end{aligned}$$

Pour que ce développement soit d'ordre aussi élevé que possible, il faut et il suffit que $\frac{1}{2}-\lambda=-\frac{2}{3}+\lambda-\mu=0$, ce qui donne $\lambda=\frac{1}{2}$ et $\mu=-\frac{1}{6}$. Dans ce cas, on obtient $w_n\sim\frac{\frac{3}{4}-\lambda+3\mu}{n^4}=-\frac{1}{4n^4}$, soit avec les notations de l'énoncé $D=-\frac{1}{4}$ et $\beta=4$.

III.4. Puisque la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on aura, pour tout $k \geqslant 2$

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\beta} \leqslant \frac{1}{k^\beta} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\beta}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1}{k^{\beta-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\beta-1}}\right] \leqslant \frac{1}{k^\beta} \leqslant \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1}{(k-1)^{\beta-1}} - \frac{1}{k^{\beta-1}}\right]$$

puis en faisant la somme de ces inégalités pour k variant de n à $+\infty$ (toutes les séries convergent !), on obtient, après télescopage et puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k^{\beta-1}} = 0$

$$\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{n^{\beta-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\beta} \leqslant \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(n-1)^{\beta-1}}\,.$$

On déduit alors du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\beta \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\beta} = \frac{1}{\beta-1}$ soit encore

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\beta-1)n^{\beta-1}}\,.$$

III.5.

III.5.a.

i) Soit $\varepsilon > 0$. La propriété $x_n = o(y_n)$ s'écrit

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geqslant n_0,\ |x_n| \leqslant \varepsilon\,|y_n| \quad \text{ou } x_n \leqslant \varepsilon y_n \quad (\text{car } x_n, y_n \geqslant 0)\,.$$

Puisque la série à termes réels positifs $\sum y_n$ converge, il en est de même de $\sum x_n$ (directement par les théorèmes de comparaison du cours), et l'on a en additionnant les inégalités précédentes pour $n \geqslant n_0$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} x_n \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} y_n$$

ce qui signifie exactement que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} x_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} y_k\right)$.

ii) Si $x_n \sim y_n$, alors $|x_n - y_n| = o(y_n)$ par définition. D'après la question précédente, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} |x_k - y_k| = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} y_k\right)$, et puisque $\displaystyle\left|\sum_{k=n}^{+\infty} (x_k - y_k)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |x_k - y_k|$, on aura aussi $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} x_k - \sum_{k=n}^{+\infty} y_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} y_k\right)$, ce qui signifie exactement que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} y_k$.

III.5.b. On a vu en **III.3** $w_n \sim \dfrac{D}{n^\beta}$ (avec $D = -1/4$ et $\beta = 4$). Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^\beta}$ est une série de Riemann convergente, la question précédente donne $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{D}{n^\beta} \sim \frac{D}{(\beta-1)n^{\beta-1}}$ d'après **III.4**. En remplaçant D et β par leurs valeurs, on a donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^3}\,.$$

III.5.c. En **III.3** on a trouvé

$$u_k - u_{k+1} = \frac{\lambda}{k(k+1)} + \frac{\mu}{k(k+1)(k+2)} + w_k \quad \text{avec } \lambda = \frac{1}{2} \text{ et } \mu = -\frac{1}{6}\,.$$

En additionnant ces égalités pour k variant de n à $+\infty$, puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \gamma$, on obtient

$$u_n - \gamma = \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \mu \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \sum_{k=n}^{+\infty} w_k$$

soit, d'après les calculs faits au début de la partie **III** :

$$u_n - \gamma = \frac{\lambda}{n} + \frac{\mu}{2n(n+1)} + \sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n(n+1)} + \sum_{k=n}^{+\infty} w_k \,.$$

Le terme correctif de l'énoncé est donc égal à

$$v_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{12n(n+1)} \,.$$

III.5.d. Voir le programme précédent. L'ajout d'un simple terme correctif a fait passer la précision obtenue de 10^{-2} à 10^{-4} environ.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆