CORRIGÉ DU DM N°5 (*Centrale PC 2009, extrait et adapté*)

Partie I. Séries factorielles

I.A. I.A.1. On a pour $n \geqslant 1$ (le dénominateur est bien non nul) :

$$\begin{aligned}\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)} &= n.\frac{1}{x+n}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \\ &= \left(1-\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

d'où (les quantités sont positives donc les $\ln$ existent)

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente (série de Rieman), il résulte des théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs que la série $\sum \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$ est absolument convergente.

I.A.2. La série précédente est donc convergente. Si l'on note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$, alors

$$S(x) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\left[\ln(w_n(x)) - \ln(w_{n-1}(x))\right]\right) = \lim_{N\to+\infty}\left[\ln(w_N(x)) - \ln(w_0(x))\right]$$

et donc

$$\lim_{N\to+\infty} w_N(x) = \exp\left(S(x) + \ln(w_0(x))\right)$$

ce qui est le résultat demandé avec $\ell(x) = \exp\left(S(x)+\ln(w_0(x))\right)$ qui est bien un réel strictement positif.

I.B. D'après le résultat précédent, on peut écrire puisque $\ell(x) \neq 0$:

$$|a_n u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} l(x)\,|a_n v_n(x)|$$

Les deux séries de termes généraux positifs $\sum |a_n u_n(x)|$ et $\sum |a_n v_n(x)|$ sont donc de même nature d'après les résultats du cours sur la comparaison de séries à termes positifs. C'est exactement le résultat demandé.

I.C.

I.C.1. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x \geqslant \alpha$ on a, puisque $x \mapsto u_n(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$|a_n u_n(x)| = |a_n|\, u_n(x) \leqslant |a_n|\, u_n(\alpha)$$

donc $\|a_n u_n\|_\infty^{[\alpha,+\infty[} \leqslant |a_n|\, u_n(\alpha)$.
Or puisque $\alpha > 0$, la série $\sum |a_n u_n(\alpha)|$ converge par définition de $\mathscr{A}$, ce qui implique (toujours les théorèmes de comparaison sur les séries positives) que la série de fonctions $\sum a_n u_n$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

I.C.2. La série de fonctions $\sum a_n u_n$ converge donc uniformément sur $[\alpha, +\infty[$, et puisque les u_n sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, il en résulte que f_a est continue sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$. Cela étant vrai pour tout $\alpha > 0$, f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.C.3. Chaque fonction u_n tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$; puisque la série $\sum a_n u_n$ converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$, le théorème d'interversion des limites peut s'appliquer et donc

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = 0 .$$

I.D.

I.D.1. Si l'on prend : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{(n+1)}$ on a, pour tout $x > 0$, $a_n v_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)^{x+1}}$ donc la série $\sum a_n v_n(x)$ converge absolument pour tout $x > 0$ (série de Riemann). D'après **III.B.**, il en est de même de la série $\sum a_n u_n(x)$ et par conséquent la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{A}$.

I.D.2. Si on prend : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ la série $\sum v_n(x)$ est une série de Riemann qui converge seulement pour $x > 1$, donc la suite constante égale à 1 n'appartient pas à $\mathscr{A}$.

I.E.

I.E.1. u_n est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes usuels. Pour tout $x > 0$

$$\ln u_n(x) = \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

donc

$$\frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} .$$

La question posée revient à montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leqslant \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)$$

On utilise la classique méthode de comparaison série-intégrale. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{x+k} \leqslant \int_{x+k-1}^{x+k} \frac{dt}{t}$$

puis en additionnant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leqslant \int_{x}^{x+n} \frac{dt}{t} = \ln(x+n) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)$$

ce qu'il fallait démontrer.

I.E.2. On sait déjà que pour tout n , la fonction $x \mapsto a_n u_n(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que la série $\sum a_n u_n(x)$ converge simplement sur ce domaine.

Pour pouvoir dire que la somme est de classe $\mathscr{C}^1$ et pouvoir dériver terme à terme, il suffit d'après un théorème du cours de prouver la convergence uniforme sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$ de la série $\sum a_n u_n'(x)$.

Pour cela, nous allons prouver la convergence normale de cette série sur tout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$.

Pour tout $x \geqslant \alpha$ on a d'après la question précédente :

$$|a_n u'_n(x)| \leqslant |a_n|\, u_n(x) \left(\frac{1}{x} + \ln(\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right) \leqslant |a_n|\, u_n(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} + \ln(\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)\right)$$

donc $\|a_n u_n'\|_\infty^{[\alpha,+\infty[} \leqslant |a_n|\, u_n(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} + \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)\right)$.

Or la série $\sum |a_n|\, u_n(\alpha)$ converge. Il suffit donc de prouver la convergence de la série $\sum |a_n|\, u_n(\alpha) \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)$.

Comme $\ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, on se ramène à l'étude de $\sum |a_n|\, u_n(\alpha) \ln(n)$. Pour cela, on utilise une méthode semblable à celloe vue en cours pour les séries de Bertrand.

Choisissons $\alpha' \in]0, \alpha[$. Comme $\alpha' > 0$, la série $\sum |a_n| u_n(\alpha')$ converge.
Or, en utilisant l'équivalent trouvé en **I.A.2** :

$$|a_n| u_n(\alpha) \ln n = |a_n| u_n(\alpha') \cdot \frac{u_n(\alpha) \ln n}{u_n(\alpha')} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n| u_n(\alpha') \cdot \frac{\ell(\alpha')}{\ell(\alpha)} \frac{(n+1)^{\alpha'} \ln n}{(n+1)^{\alpha}}$$

et comme

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln n}{(n+1)^{\alpha-\alpha'}} \right) = 0$$

on a :

$$|a_n| u_n(\alpha) \ln(n) = o\left(|a_n| u_n(\alpha')\right)$$

ce qui assure la convergence absolue de la série $\sum |a_n| u_n(\alpha) \ln n$, et permet finalement de conclure que f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II. Représentation intégrale

II.A.

II.A.1. Les P_k forment une famille de $n+1$ polynômes dans un espace vectoriel de dimension $n+1$. Pour montrer qu'ils en forment une base, il suffit donc de montrer que la famille est libre.

Or si $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de réels telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$, on obtient, pour tout $j \in [\![0\,;k]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(-j) = 0$. Mais $P_k(-j)$ est nul si $k \neq j$; il reste donc $\lambda_j P_j(-j) = 0$ et puisque $P_(j)(-j) \neq 0$, on obtient $\lambda_j = 0$. Cela prouve l'indépendance linéaire des P_k et achève la démonstration.

II.A.2. Le polynôme constant égal à $n!$ se décompose donc dans cette base :

$$\exists\, (\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } n! = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k\,.$$

En divisant cette relation par $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} (X+i)$, on trouve :

$$\frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{X+k}\,.$$

II.A.3. La méthode pour calculer les α_k est classique : on multiplie l'égalité précédente par $X+k$ puis on l'applique pour $X = -k$; on obtient

$$\alpha_k = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (i-k)} = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (i-k) \prod_{i=k+1}^{n} (i-k)} = \frac{n!}{(-1)^k k!(n-k)!}$$

soit finalement : $\alpha_k = (-1)^k \dbinom{n}{k}$.

II.B. Pour $x \geqslant 1$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $y \mapsto (1-y)^{x-1+k}$ est continue sur $[0,1]$ et :

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}\, dy = \left[\frac{-(1-y)^{x+k}}{x+k} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x+k}\,.$$

II.C. En utilisant le changement de variable $t = 1-y$ puis la formule du binôme on a, pour tout $x \geqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n\, dy &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\, dt = \int_0^1 t^{x-1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^k \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{x-1+k}\, dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x+k} = u_n(x)\end{aligned}$$

en utilisant les résultats des deux questions précédentes.

Rem : ce résultat pouvait s'obtenir de façon bien plus simple que celle suggérée par l'énoncé, en faisant n intégrations par parties successives.

On en déduit immédiatement

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n \, dy \,.$$

II.D.

II.D.1. Comme $a \in \mathscr{A}$, la série $\sum a_n u_n(x)$ converge absolument pour tout $x > 0$. En particulier, pour $x = 1$, on obtient que la série $\sum \frac{a_n}{n+1}$ est absolument convergente ; la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Il en est donc de même pour sa série dérivée, qui est la série entière $\sum a_n x^n$.

II.D.2. En ant que somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1, φ_a est continue sure sur $[0\,;1[$.

Et puisque la fonction $y \mapsto (1-y)^{x-1}$ est également continue (car $x \geqslant 1$), on en déduit que la fonction $y \mapsto (1-y)^{x-1}\varphi_a(y)$ est continue sur $[0\,;1[$.

II.D.3. Il s'agit ici d'intervertir intégration sur $[0\,;1[$ et la sommation, car une fois celle-ci justifiée, on aura :

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1}\varphi_a(y)\,dy = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-y)^{x-1} y^n\right) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n \, dy = f_a(x)\,,$$

ce qu'il faut démontrer.

Il reste donc à justifier cette interversion. Pour cela, nous utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

On se fixe un $x \geqslant 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $y \mapsto a_n(1-y)^{x-1}y^n$ est continue et intégrable sur $[0\,;1[$;
- la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(1-y)^{x-1}y^n$ converge simplement et sa somme $(1-y)^{x-1}\varphi_a(y)$ est continue sur $[0\,;1[$ d'après la question précédente ;
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left|a_n(1-y)^{x-1}y^n\right| dy = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| \int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n dy = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| u_n(x)$. Cette série est bien convergente puisque $a \in \mathcal{A}$.

Nous venons de vérifier les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme, ce qui permet de conclure.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆