DM N°6 (pour le 18/12/2015)

Partie I

1. Soit k un entier $\geqslant 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

On note $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}\,dt$.

2. Donner la valeur de J_k. On pourra utiliser l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

On note $K = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}$.

4. **a)** Montrer que : $K = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1+e^{-2t})}\,dt$.

b) En déduire que : $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$.

5. Montrer que $\dfrac{1}{2} < K < 1$.

Partie II

Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout réel x dans $]0\,;\pi[$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \qquad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad \text{et} \qquad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$$

6. **a)** Pour tout x dans $]0\,;\pi[$, montrer que $A_n(x) = \dfrac{\sin(nx/2)\sin\big((n+1)x/2\big)}{\sin(x/2)}$.

b) Si $n \geqslant 2$, montrer que $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) + \varepsilon_n(x)$ où $\big(\varepsilon_n(x)\big)_{n\geqslant 2}$ est une suite tendant vers 0.

7. En déduire la convergence de la série de terme général $u_n(x)$.

On notera $f(x)$ sa somme.

8. **a)** Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $f_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) - f_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) \geqslant C\sqrt{n}$. Expliciter une telle constante.

b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $]0\,;\pi[$?

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Si $z = a + ib$ est un nombre complexe avec a et b réels, on désigne par $\mathscr{Im}\,(z)$ sa partie imaginaire, c'est-à-dire b.

9. **a)** Soit $x \in]0;\pi[$. Déterminer le tableau de variations de la fonction $t \mapsto \left|e^{ix-t}-1\right|$ définie pour $t \in]0;+\infty[$.

b) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

c) établir alors que : $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \mathscr{I}m \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})} \, dt \right)$.

d) En déduire que : $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos x)}$.

e) Montrer que $f(x) > 0$.

f) En comparant les valeurs de $\operatorname{ch} t$ et e^t sur $]0;+\infty[$, montrer que $\dfrac{1}{2} < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 1$.

Partie III

Dans cette partie, $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

10. **a)** Établir que la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x)}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

b) Montrer que : $f(2x) = \dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{du}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x)}$.

11. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]0;\pi[$.

12. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;\pi[$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆