CORRIGÉ DU DM N°6 (E3A PC 2001)

Partie I

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Au voisinage de 0, elle est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, qui est positive et intégrable sur $]0;1]$ et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$, qui est positive et intégrable sur $[1;+\infty[$. Donc elle est intégrable sur $]0;+\infty[$.

2. Le changement de variable $u=\sqrt{kt}$ (bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0;+\infty[$ sur lui-même) conduit à :
$$\mathrm{J}_k=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,.$$

3. Analogue au 1. : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}$ est continue sur $]0,+\infty[$; au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t} \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, et au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t} \sim \dfrac{2\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

4. **a)** Il suffit de remplacer $\mathrm{ch}\,t$ par sa définition, et de multiplier numérateur et dénominateur par e^{-t}.

   b) Sur $]0;+\infty[$, $0<\mathrm{e}^{-2t}<1$, donc (en utilisant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1+x}$ ou les formules sur les séries géométriques) :
$$\forall t>0\,,\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-2kt}.$$
   Donc :
$$\mathrm{K}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t.$$
   La série fournie par l'énoncé n'étant pas absolument convergente, il n'y a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme.
   Il y a alors deux solutions possibles :

   - *1ère solution : un calcul direct.*
     On écrit, pour $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\mathrm{K}&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}\left((-1)^k\frac{\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$
     puisque la première somme étant finie, on peut intervertir $\sum$ et $\int$. Il s'agit donc de montrer que :
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t=0.$$
     Il s'agit du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial, donc :
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-(2n+3)t}}{\sqrt{t}},$$
     puis :
$$\left|\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right|\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{J}_{2n+3}=\sqrt{\frac{\pi}{2n+3}},$$
     qui tend bien vers 0 si n tend vers $+\infty$.
     En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien :
$$\mathrm{K}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{J}_{2k+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}\,.$$

- *2ème solution : utilisation du théorème de convergence dominée pour les séries.*

  On remarque que, pour $t > 0$ fixé, la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}$ vérifie le critère spécial sur les séries alternées. On peut donc majorer ses sommes partielles :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$$

  avec φ continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

  Le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles de la série permet alors de conclure.

5. La série de somme K est une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère spécial. Sa somme est donc comprise entre deux sommes partielles consécutives et on aura en particulier :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} < \mathrm{K} < 1,$$

ce qui implique l'inégalité de l'énoncé.

On pouvait aussi faire un encadrement direct (comme en **II.9.f**), en utilisant l'encadrement $1 < 1+\mathrm{e}^{-2t} < 2$ pour $t > 0$).

Partie II

6. **a)** Calcul classique à savoir faire ! Puisque $\sin kx$ est nul pour $k = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_n(x) &= \mathcal{I}m\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}\right) = \mathcal{I}m\left(\frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\right) \qquad (x \in]0\,;\pi[, \text{ donc } \mathrm{e}^{ix} \neq 1) \\
&= \mathcal{I}m\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

b) Il s'agit de faire ici une *transformation d'Abel*. En remarquant que, si $k \geqslant 2$, $\sin(kx) = \mathrm{A}_k(x) - \mathrm{A}_{k-1}(x)$, on écrit :

$$f_n(x) = \mathrm{A}_1(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{\mathrm{A}_k(x) - \mathrm{A}_{k-1}(x)}{\sqrt{k}}.$$

On sépare ensuite la somme en deux, et on fait un changement d'indice dans la deuxième somme :

$$f_n(x) = \mathrm{A}_1(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{\mathrm{A}_k(x)}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{A}_k(x)}{\sqrt{k+1}}.$$

On rassemble à nouveau (le terme où figure $\mathrm{A}_n(x)$ reste à part) :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k(x)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + \frac{\mathrm{A}_n(x)}{\sqrt{n}},$$

avec $\left|\dfrac{\mathrm{A}_n(x)}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{n}}$, qui tend bien vers 0 si n tend vers l'infini.

7. D'après la question précédente, il suffit de montrer que la série $\sum \mathrm{A}_k(x)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ converge. Or :

$$\left|\mathrm{A}_k(x)\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

et par télescopage, la série $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ converge.

Par comparaison, la série $\sum \mathrm{A}_k(x)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ est donc absolument convergente, ce qui permet de conclure.

8. a) On a $f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt{k}}$.

Si $n\leqslant k\leqslant 2n$, alors $\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4n}\leqslant\frac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(k\frac{\pi}{4n}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. D'autre part, $\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Donc :

$$f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\geqslant n\times\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

b) Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ convergeait uniformément sur $]0;\pi[$, alors $(f_{2n}-f_n)$ convergerait uniformément vers 0 puisque $\|f_{2n}-f_n\|_\infty\leqslant\|f_{2n}-f\|_\infty+\|f_n-f\|_\infty$, en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $]0;\pi[$. Or :

$$\left|f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right|\leqslant\|f_{2n}-f_n\|_\infty,$$

et la question précédente montre que $\lim_{n\to\infty}\left(f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right)=+\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\|f_{2n}-f_n\|_\infty=+\infty$, et la convergence n'est pas uniforme sur $]0;\pi[$.

9. a) La fonction $g:t\mapsto|e^{ix-t}-1|=\sqrt{e^{-2t}-2e^{-t}\cos x+1}$ ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$ puisque $t\in]0;\pi[$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall t\geqslant 0,\ g'(t)=\frac{2e^{-t}(\cos x-e^{-t})}{2g(t)}.$$

Si $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$, alors g' est négative sur $[0;+\infty[$. Si $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, g' s'annule et change de signe pour $t=-\ln\cos x$, valeur qui est bien positive. Le tableau de variations de g est donc (en remarquant que $\sin x>0$) :

– pour $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$:

t	0		$+\infty$
$g(t)$	$\lvert e^{ix}-1\rvert$	$\searrow$	1

– pour $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$:

t	0		$-\ln\cos x$		$+\infty$
$g(t)$	$\lvert e^{ix}-1\rvert$	$\searrow$	$\sin x$	$\nearrow$	1

b) Ce qui précède montre que $|e^{ix-t}-1|\geqslant 1$ si $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$, et que $|e^{ix-t}-1|\geqslant\sin x>0$ si $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Dans les 2 cas,

$$\forall t\in[0;+\infty[\quad\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\right|\leqslant\frac{Ce^{-t}}{\sqrt{t}}$$

où $C=\frac{1}{\sin x}$ ou 1 selon les cas, ne dépend pas de t. L'intégrabilité en résulte sans peine.

Remarque : la méthode par majoration, presque imposée par l'énoncé, est très laborieuse. On pouvait conclure pour l'intégrabilité en utilisant de simples équivalents...

c) La fonction $t\mapsto\frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$ car

$$\left|\frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\right|\leqslant\frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|}$$

qui est intégrable d'après le **b)**.

On reconnaît dans cette expression la somme partielle d'une série géométrique. Plus précisément,

$$\frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{n}(e^{ix-t})^k.$$

La somme est finie et toutes les fonctions considérées sont intégrables sur $]0;+\infty[$ donc il n'y a pas de problème pour intervertir $\sum$ et $\int$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\,dt=\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e^{ix-t})^k}{\sqrt{t}}\,dt=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}J_k=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

dont la partie imaginaire est bien $\sqrt{\pi}f_n(x)$.

d) Pour tout $t>0$, quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$ tend vers $\dfrac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$.

Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :

$$\forall t\in\,]0;+\infty[\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \left|\frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\right|\leqslant\frac{e^{-t}+e^{-(n+1)t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|}\leqslant\frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|}$$

qui est continue et, d'après **b)**, intégrable sur $]0;+\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{I}m\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\,dt\right).$$

En multipliant haut et bas par le conjugué $\overline{1-e^{ix-t}}$, on obtient :

$$\frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}=\frac{e^{ix-t}(1-e^{-ix-t})}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)}=\frac{(e^{ix-t}-e^{-2t})}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)}$$

dont la partie imaginaire est $\dfrac{e^{-t}\sin x}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)}=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{t}(\operatorname{ch}t-\cos x)}$. On a bien le résultat annoncé.

Remarque : pour $x=\frac{\pi}{2}$, on retrouve le résultat du 4.b.

e) Comme $x\in\,]0;\pi[$, $\sin x>0$, et $\operatorname{ch}t>1>\cos x$. La fonction à intégrer est donc continue, positive et non identiquement nulle ; il en résulte $f(x)>0$.

f) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}\operatorname{ch}t}\cdot$ On a $\operatorname{ch}t>\dfrac{e^t}{2}$, d'où $f(x)<\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}J_1=1$. Par ailleurs, sur $]0;+\infty[$, $\operatorname{ch}t-e^t=-\operatorname{sh}t<0$, donc $\operatorname{ch}t<e^t$ d'où $f(x)>\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}J_1=\dfrac{1}{2}$.

On retrouve le résultat de la question 5.

Partie III

10. a) Analogue à la question 3.

b) On écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch}t-\cos(2x))}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch}t+2\sin^2x-1)}$. Puis on pose $t=2u$:

$$f(2x)=\frac{\sin 2x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{2\,du}{\sqrt{2u}(\operatorname{ch}(2u)-1+2\sin^2x)}.$$

Il faut exprimer $\operatorname{ch}2u-1$. La formule n'est pas au programme, mais on la retrouve facilement :

$$\operatorname{ch}(2u)-1=\frac{e^{2u}+e^{-2u}-2}{2}=\frac{(e^u-e^{-u})^2}{2}=2\operatorname{sh}^2u$$

et on obtient bien la formule proposée.

11. La fonction $g:(u,x)\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2u+\sin^2x)}$ est clairement continue sur $]0;+\infty[\times\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $a\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Alors :

$$\forall u\in\,]0;+\infty[\quad\forall x\in\left[a;\frac{\pi}{2}\right[\quad 0\leqslant g(u,x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2u+\sin^2a)}.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $]0;+\infty[$ d'après la question précédente. L'hypothèse de domination locale est donc vérifiée. Il résulte du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre que $x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}g(u,x)\,du$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $x\mapsto f(2x)$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ comme produit de fonctions continues , donc f est continue sur $]0,\pi[$.

12. Avec les mêmes notations, on a :

$$\forall (u,x) \in]0\,;+\infty[\times \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)^2}$$

que l'on domine en valeur absolue sur $\mathbb{R}_+^* \times \left[a\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\dfrac{1}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 a)^2}$, fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (en vérifier en détails toutes les hypothèses, ce que je n'ai pas fait ici...), et f apparaît alors comme le produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Rem : on pouvait bien sûr répondre directement à la question 12, ce qui impliquait le résultat de la question 11 !