CORRIGÉ DU DM N°7 (CENTRALE MP 2015, MATHS 2)

I. Représentation intégrale de sommes de séries

I.A.

I.A.1) Pour $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $a_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ et par suite la série $\sum a_n$ converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

I.A.2) Puisque pour $k \geqslant 2$, $a_k = \dfrac{1}{k} - \ln k + \ln(k-1)$, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = H_n - 1 - \ln n\,,$$

donc $H_n = \ln n + 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k = \ln n + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k + o(1)$ puisque la série $\sum a_n$ converge.

Ainsi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$.

On en déduit directement $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.

I.B. Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}$ est de même nature que la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^r}$ (série de Bertrand).

- Si $r = 0$, alors $\sum \dfrac{\ln n}{n^r} = \sum \ln n$ diverge grossiérement.
- Si $r = 1$, alors pour $n \geqslant 3$ $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$; la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ étant divergente, par comparaison, il en est de même pour la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$.
- Si $r \geqslant 2$, alors $n^{3/2}\dfrac{\ln n}{n^r} = \dfrac{\ln n}{n^{r-3/2}} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\ln n}{n^r} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$; or $\dfrac{3}{2} > 1$, donc la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge et par comparaison, il en ait de même pour la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^r}$.

En conclusion, la série $\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}$ converge si et seulement si $r \geqslant 2$ (r entier).

I.C.

I.C.1) $\forall t \in]-1\,;1[$, $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$, de rayon de convergence $R = 1$.

$\forall t \in]-1\,;1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, de rayon de convergence $R = 1$.

I.C.2)
- Les deux fonctions $-\ln(1-t)$ et $\dfrac{1}{1-t}$ sont développables en série entière sur $]-1\,;1[$, donc le théorème du cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières assure que leur produit $-\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur au moins $]-1\,;1[$.
- Posons $a_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n}$ et $b_n = 1$ pour tout n, alors $\forall t \in]-1\,;1[$, $-\dfrac{\ln(1-t)}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ où $c_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$. Donc :

$$\forall t \in]-1\,;1[, \quad -\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n\,.$$

I.D.

I.D.1) La fonction $t \longmapsto t^p(\ln t)^q$ est continue sur $]0\,;1]$.

$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}(t^p(\ln t)^q) = \lim_{t\to 0^+} t^{p+1/2}(\ln t)^q = 0$ (croissances comparées) donc au voisinage de 0, $t^p(\ln t)^q = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

La fonction positive $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant intégrable au voisinage de 0, la fonction $t \mapsto t^p(\ln t)^q$ est intégrable sur $]0\,;1]$.

I.D.2) Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto t^p(\ln t)^q$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon\,;1]$, ce qui permet une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I^{\varepsilon}_{p,q} &= \int_{\varepsilon}^{1} \left(\frac{t^{p+1}}{p+1}\right)'(\ln t)^q\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}(\ln t)^q}{p+1}\right]_{\varepsilon}^{1} - \frac{q}{p+1}\int_{\varepsilon}^{1} t^p(\ln t)^{q-1}dt \\ &= -\frac{q}{p+1}I^{\varepsilon}_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^q}{p+1}\,. \end{aligned}$$

I.D.3) Les intégrales $\int_0^1 t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1}dt$ étant convergentes, on peut faire tendre ε vers 0 dans la relation précédente, et on obtient l'égalité :

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}\,.$$

I.D.4) La relation de récurrence ci-dessus conduit à :

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1}\,\frac{-(q-1)}{p+1}\cdots\frac{-1}{p+1}I_{p,0} = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^q}I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}\,.$$

I.E. Posons $u_n(t) = a_n t^n(\ln t)^{r-1}$ pour $t \in\,]0\,;1[$. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue et intégrable sur $]0\,;1[$;
- la série de fonction $\sum a_n t^n$ converge simplement vers f sur $]0\,;1[$, donc il en est de même de la série de fonctions $\sum u_n$, et cette série a pour somme $t \mapsto (\ln t)^{r-1}f(t)$, continue sur $]0\,;1[$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = |a_n I_{n,r-1}| = (r-1)!\frac{|a_n|}{(n+1)^r}$, donc la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)\,dt$ est convergente d'après l'hypothèse de l'énoncé.

Le théoème d'intégration terme à terme s'applique, , ce qui permet de permuter intégrale et série :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\ln t)^{r-1}f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{n,r-1} = (-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(n+1)^r}\,. \end{aligned}$$

I.F.

I.F.1) On pose ici : $\forall t \in\,]-1\,;1[$, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n = -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$ (cf **I.C.2**).

$r \geqslant 2$, donc d'après la question **I.B**, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{H_n}{(n+1)^r}$ est convergente, ce qui entraine d'après la question précédente **I.E** :

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1}f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{(n+1)^r}\,,$$

c'est à dire :

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1 (\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

I.F.2) Posons, pour $t \in\,]0\,;1[$: $u(t) = (\ln t)^{r-1}$ et $v(t) = \frac{1}{2}\big(\ln(1-t)\big)^2$.

- Au voisinage de 0, $u(t)v(t) \sim \frac{t^2}{2}(\ln t)^{r-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

– Au voisinage de 1, $u(t)v(t) \sim \dfrac{(-1)^{r-1}}{2}(1-t)^{r-1}\big(\ln(1-t)\big)^2 \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.

Donc le crochet $\big[u(t)v(t)\big]_0^1$ est nul, ce qui justifie l'intégration par parties :

$$S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1 u(t)v'(t)dt = -\frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!}\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

I.F.3) En prenant $r=2$ dans l'égalité précédente, on obtient $S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2}{t}dt$ et le changement de variables $u = 1-t$ (changement de variable affine, donc licite) aboutit à l'égalité :

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

On pose ici : $\forall t \in\,]-1\,;1[,\ f(t) = \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^r}$ converge absolument, donc on peut utiliser l'égalité de la question **I.E** avec $r=3$ et $a_n = 1$ pour tout n, ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3} = 2\zeta(3)\,.$$

En conclusion : $S_2 = \zeta(3)$.

II. La fonction β

II.A. *La fonction* Γ

II.A.1) – La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;

– Au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$, donc $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable au voisinage de 0 par comparaison à une fonction de Riemann puisque $1-x<1$;

– Au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ donc $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc par comparaison à une fonction de Riemann la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

On conclut que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x>0$.

II.A.2) Le changement de variable affine $t = \alpha u$ dans l'expression de $\Gamma(x)$ donne

$$\forall x>0,\ \Gamma(x) = \alpha^x \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}y\,,$$

donc cette dernière intégrale existe et on a :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha^x}\Gamma(x)\,.$$

II.B. *La fonction* β *et son équation fonctionnelle*

II.B.1) – La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0\,;1[$.

– Au voisinage de 0, elle est équivalente à $t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$, donc intégrable au voisinage de 0 par comparaison à une fonction de Riemann puisque $1-x<1$.

– Au voisinage de 1, elle est équivalente à $(1-t)^{y-1} = \dfrac{1}{(1-t)^{1-y}}$, donc elle est intégrable au voisinage de 1 par comparaison à une fonction de Riemann puisque $1-y<1$.

En conclusion $\beta(x,y)$ existe pour tous $x>0,\ y>0$.

II.B.2) Le changement de t en $1-t$ (changement de variables affine donc licite), entraine immédiatement que $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

II.B.3) Si $x>0$ alors $x+1>1$, ce qui assure l'existence de $\beta(x+1,y)=\displaystyle\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

Par intégration par parties avec $u(t)=t^x$ et $v'(t)=(1-t)^{y-1}$, on a (tous les termes existent) :

$$\begin{aligned}\beta(x+1,y)&=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y}\right]_0^1+\frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,(1-t)\,\mathrm{d}t=\frac{x}{y}\int_0^1\Big(t^{x-1}(1-t)^{y-1}-t^x(1-t)^{y-1}\Big)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x}{y}\big[\beta(x,y)-\beta(x+1,y)\big]\,,\end{aligned}$$

donc $\dfrac{x+y}{y}\beta(x+1,y)=\dfrac{x}{y}\beta(x,y)$ puis $\beta(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

II.B.4) De l'égalité précédente, on obtient en remplacant y par $y+1$, $\beta(x+1,y+1)=\dfrac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1)$ et en inversant les rôles, $\beta(y+1,x)=\dfrac{y}{x+y}\beta(y,x)$, donc par symétrie de β, on aura $\beta(x,y+1)=\dfrac{y}{x+y}\beta(x,y)$, et en remplacant cette dernière dans l'égalité $\beta(x+1,y+1)=\dfrac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1)$, on obtient :

$$\beta(x+1,y+1)=\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)\,.$$

II.C. *Relation entre la fonction β et la fonction Γ*

II.C.1) Si la relation $(\mathcal{R})$ est vraie pour $x>1$ et $y>1$, on a, d'après **II.B.4** :

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x,y)&=\frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\beta(x+1,y+1)\underset{(\mathcal{R})}{=}\frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}\\&=\frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\frac{x\Gamma(x)\,y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,,\end{aligned}$$

donc si $(\mathcal{R})$ est vraie pour $x>1$ et $y>1$ alors elle est vérifiée pour tout $x>0$ et $y>0$.

II.C.2) Soit $\theta(u)=\dfrac{u}{1+u}$; θ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall u>0,\ \theta'(u)=\dfrac{1}{(1+u)^2}$ donc θ est strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;1[$. Le changement de variable $t=\theta(u)$ dans l'expression de $\beta(x,y)$ est licite et donne :

$$\beta(x,y)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u\,.$$

II.C.3) La condition $x>1,y>1$ assure l'existence de $\Gamma(x+y)$.

La fonction $t\mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ est continue positive, donc $F_{x,y}:t\mapsto\displaystyle\int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et par suite $\forall t>0,\ F_{x,y}(t)\leqslant\displaystyle\lim_{t\to+\infty}F_{x,y}(t)=\Gamma(x+y)$.

II.C.4) Posons : $g(a,u)=\dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}((1+u)a)$ pour tout $(a,u)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.

- pour tout $a\in\mathbb{R}_+$, $u\mapsto g(a,u)$ est continue (par morceaux) $\mathbb{R}_+$ car $x-1>0$ et $F_{x,y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, $a\mapsto g(a,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $F_{x,y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$;
- $\forall(a,u)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,\ 0\leqslant g(a,u)\leqslant\Gamma(x+y)\dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$ d'après **II.C.3** ; la fonction dominante $u\mapsto\Gamma(x+y)\dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$ est indépendante de a et continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **II.C.2**.

On en déduit que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

II.C.5) D'après la caractérisation séquentielle de la limite, pour démontrer le résultat demandé, il suffit de montrer que, pour toute suite (a_n) de réels positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}G(a_n)=\Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

Soit donc (a_n) une telle suite.On a $G(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\big((1+u)a_n\big)\,\mathrm{d}u$; posons, pour $u > 0$:

$$f_n(u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\big((1+u)a_n\big)\,.$$

- Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$;
- Pour tout $u > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \lim_{a\to+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$, c'est-à-dire que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $u \mapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$, qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u > 0$, $|f_n(u)| \leqslant \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$, et cette fonction dominante est selon **II.C.2** continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème de convergence dominée peut donc s'appliquer, et affirme que :

$$\lim_{n\to+\infty} G(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)du = \Gamma(x+y)\beta(x,y)\,,$$

d'où le résultat.

II.C.6) Posons encore : $g(a,u) = \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$ pour tout $(a,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ u \mapsto g(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **II.C.4** ;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial a}(a,u) &= \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,(1+u)\,F'_{x,y}\big((1+u)a\big) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,(1+u)\,e^{-(1+u)a}\big((1+u)a\big)^{x+y-1}\\ &= a^{x+y-1}e^{-(1+u)a}u^{x-1}\end{aligned}$$

  existe ;
- $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ a \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $x+y-1 > 0$;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ car $x-1 > 0$;
- $\forall a \in [c\,;d],\ \forall u \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial a}(a,u)\right| \leqslant d^{x+y-1}e^{-(1+u)c}u^{x-1} = d^{x+y-1}e^{-c}\,e^{-c\,u}u^{x-1}$$

  et $u \mapsto e^{-c\,u}u^{x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **II.A.2** puisque $c > 0$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[c\,;d]$. Ceci étant valable pour tout $[c\,;d] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.C.7) De plus, la formule de dérivation donne :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial a}(a,u)\,\mathrm{d}u = a^{x+y-1}e^{-a}\int_0^{+\infty} e^{-a\,u}u^{x-1}\,\mathrm{d}u\,,$$

soit, avec le résultat de **II.A.2**, $G'(a) = \Gamma(x)\,a^{y-1}e^{-a}$.

II.C.8) D'après l'égalité précédente, et puisque G est continue en 0 avec $G(0) = 0$, on a :

$$\forall a > 0,\ G(a) = G(0) + \Gamma(x)\int_0^a t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)\int_0^a t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient avec la question **II.C.5** :

$$\forall x > 1,\ \forall y > 1,\ \Gamma(x+y)\beta(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)\,.$$

III. La fonction digamma

III.A. $\forall x > 0,\ \ln\big(\Gamma(x+1)\big) - \ln\big(\Gamma(x)\big) = \ln\left(\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right) = \ln x$ donc, en dérivant :

$$\forall x > 0,\ \psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

III.B. ***Sens de variation de*** ψ

III.B.1) Selon les résultats admis au **II.A** (et démontrés en classe), Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'y annule pas donc pour tout $x > 0$, $y \mapsto \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \beta(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

En particulier, $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)$ existe et :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)\,\Gamma'(x+y)}{\big(\Gamma(x+y)\big)^2} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left[\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right]$$
$$= \beta(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big)\,.$$

III.B.2) Si $0 < y \leqslant y'$, pour tout $t \in]0\,;1[$, $t^x(1-t)^y \geqslant t^x(1-t)^{y'}$ donc $\beta(x,y) \geqslant \beta(x,y')$. Ainsi $y \mapsto \beta(x,y)$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$.

Rem : on pouvait aussi appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour dériver par rapport à y *l'expression intégrale donnant* $\beta(x,y)$*, mais c'était bien plus long, donc assez maladroit !*

III.B.3) En conséquence, pour tous $x, y > 0$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) \leqslant 0$.

De plus, $\beta(x,y) > 0$ donc, grâce à la formule du **III.B.1**, $\psi(y) \leqslant \psi(x+y)$ pour tous $x, y > 0$, ce qui montre que ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.C. ***Une expression de*** ψ ***comme somme d'une série de fonctions***

III.C.1) Soit $x > -1$, $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1\,;n]\!]$; en appliquant l'égalité de **III.A** à $k+x$, on obtient

$$\psi(k+x+1) - \psi(k+x) = \frac{1}{k+x}$$

ce qui donne par téléscopage :

$$\psi(x+n+1) - \psi(x+1) = \sum_{k=1}^{n}\big[\psi(x+k+1) - \psi(x+k)\big] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}\cdot$$

En particulier, pour $x = 0$, $\psi(n+1) - \psi(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ donc, en soustrayant membre à membre,

$$\psi(n+1) - \psi(1) - \psi(x+n+1) + \psi(x+1) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right),$$

soit

$$\forall x > -1,\ \forall n \geqslant 2,\quad \psi(x+1) - \psi(1) = \psi(x+n+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right).$$

III.C.2) Par définition de p, on a $p-1 \leqslant x < p$, donc $n+p \leqslant n+x+1 < n+p+1$ et par croissance de ψ $\psi(n+p) \leqslant \psi(n+x+1) \leqslant \psi(n+p+1)$ et par suite

$$0 \leqslant \psi(n+p) - \psi(n) \leqslant \psi(n+x+1) - \psi(n) \leqslant \psi(n+p+1) - \psi(n)$$

avec

$$\psi(n+p+1) - \psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p}(\psi(k+1) - \psi(k)) = \sum_{k=n}^{n+p}\frac{1}{k} = H_{n+p} - H_{n-1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{n+p}1 = \frac{p+1}{n}$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

III.C.3) Pour $x > -1$, la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right)$ est convergente car $\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}=\frac{x}{k(k+x)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{x}{k^2}$.

De plus, $x > -1$ étant fixé il en est de même de p donc on a $\frac{p+1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc l'inégalité de la question 2 donne $\psi(x+n+1)-\psi(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

En particulier, $\psi(n+1)-\psi(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Or l'égalité de la question 1 donne

$$\psi(x+1)=\underbrace{\big(\psi(x+n+1)-\psi(n)\big)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}-\underbrace{\big(\psi(n+1)-\psi(n)\big)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}+\psi(1)+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right)}_{\text{converge}}$$

donc :

$$\forall x > -1,\ \psi(x+1)=\psi(1)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right).$$

III.D. *Un développement en série entière*

III.D.1) Posons, pour $n\geqslant 2$, $v_n(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}$. On a :

- $\forall n\geqslant 2$, v_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-n\,;+\infty[$ donc sur $[-1\,;+\infty[$ avec, pour tout $k\geqslant 1$, $v_n^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k+1}k!}{(x+n)^{k+1}}$;
- $\forall x\geqslant -1$, $v_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{n^2}$, donc la série $\sum_{n\geqslant 2}v_n$ converge simplement sur $[-1\,;+\infty[$;
- Pour $k\geqslant 1$, $\left\|v_n^{(k)}\right\|_\infty^{[-1;+\infty[}=\frac{k!}{(n-1)^{k+1}}$ donc, puisque $k+1>1$, la série $\sum_{n\geqslant 2}v_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[-1\,;+\infty[$.

Donc le théorème de dérivation terme à terme s'applique et g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1\,;+\infty[$.

De plus, $\forall x\in[-1,+\infty[,\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ g^{(k)}(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}v_n^{(k)}(x)$.

Or $v_n^{(k)}(0)=\frac{(-1)^{k+1}k!}{n^{k+1}}$ donc $g^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}k!\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+1}}$ soit :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ g^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}k!\,\big(\zeta(k+1)-1\big).$$

III.D.2) g étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1\,;+\infty[$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et $x\in[-1,+\infty[$:

$$\left|g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1},$$

Or, pour tout $t\in[0\,;x]$, on a $t\geqslant -1$ donc :

$$\left|g^{(n+1)}(t)\right|=\left|(-1)^{n+2}(n+1)!\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{(p+t)^{n+2}}\right|\leqslant(n+1)!\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{(p-1)^{n+2}}\leqslant(n+1)!\zeta(2)$$

car, pour tout $p\geqslant 2$, $0<p-1\leqslant p+t$ et $\frac{1}{(p-1)^{n+2}}\leqslant\frac{1}{(p-1)^2}$ (car $n\geqslant 0$). On obtient donc $M_{n+1}\leqslant(n+1)!\zeta(2)$ puis :

$$\forall x\geqslant -1,\qquad\left|g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leqslant\zeta(2)\,|x|^{n+1}.$$

Mais, si $x\in\,]-1\,;1[$, $\zeta(2)\,|x|^{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc l'inégalité ci-dessus implique que

$$\forall x\in\,]-1\,;1[,\qquad\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}g(x)$$

ce qui signifie que g est somme de sa série de Taylor donc développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

III.D.3) Avec l'égalité vue en **III.C.3**, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1\,;1[,\quad \psi(x+1) &= \psi(1) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right) = \psi(1) + \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + g(x)\\ &= \psi(1) + \frac{x}{x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\\ &= \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,x^n + g(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\big(\zeta(n+1)-1\big)\,x^n \quad \text{(cf. question 1)},\end{aligned}$$

ce qui donne bien : $\forall x \in]-1\,;1[,\quad \psi(x+1) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\zeta(n+1)\,x^n$.

IV. Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

IV.A. *Une relation entre B et ψ*

- On a déjà vu en **III.B.1** que pour tout $x > 0$ $y \mapsto \beta(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, ce qui justifie la définition de la fonction B.
- Reprenons l'égalité vue en**III.B.1**] : $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \dfrac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big)$. On en déduit, en dérivant par rapport à y :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big) + \beta(x,y)\big(\psi'(y) - \psi'(x+y)\big)\\ &= \beta(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big)^2 + \beta(x,y)\big(\psi'(y) - \psi'(x+y)\big).\end{aligned}$$

Or $\beta(x,1) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ donc

$$\forall x > 0,\ xB(x) = \big(\psi(1) - \psi(x+1)\big)^2 + \big(\psi'(1) - \psi'(x+1)\big).$$

- $\psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ et Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et ne s'annule pas, donc ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et par suite B l'est aussi comme produit de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et de la fonction $x \mapsto \big(\psi(1+x) - \psi(1)\big)^2 - \big(\psi'(1) - \psi'(1+x)\big)$.

IV.B. *Expression de S_r à l'aide de la fonction B*

IV.B.1) Soit $x > 0$ fixé. Posons $h(y,t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^{x-1}\exp\big[(y-1)\ln(1-t)\big]$. On a :

- pour tout $y > 0$, $t \mapsto h(y,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0\,;1[$ d'après **II.B.1** ;
- $\forall (y,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0\,;1[,\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t) = \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t) = \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ existent ;
- pour tout $t \in]0\,;1[$, $y \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)$ et $y \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $y > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)$ sont continues (par morceaux) sur $]0\,;1[$;
- soit c tel que $0 < c < 1$, on a les dominations pour $y \in [c\,;+\infty[$:

$$\forall t \in]0\,;1[,\ \left|\frac{\partial h}{\partial y}(y,t)\right| = |-\ln(1-t)h(y,t)| \leqslant |\ln(1-t)|\,t^{x-1}(1-t)^{c-1} = \varphi_1(t)$$

et

$$\forall t \in]0\,;1[,\ \left|\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)\right| = \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leqslant \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{c-1} = \varphi_2(t)$$

avec $\varphi_1,\ \varphi_2$ continues sur $]0\,;1[$ et intégrables sur $]0\,;1[$ (elles tendent vers 0 quand t tend vers en 0 car $|\ln(1-t)| \underset{0}{\sim} t$ et $x > 0$ et en 1 ce sont des intégrales de Bertrand, à détailler mais c'est toujours pareil et cela devient lassant...).

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique et $y \mapsto \beta(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[c\,;+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée seconde est donnée par :

$$\forall y > 0, \forall x > 0,\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,y) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

ce qui entraine en particulier pour $y = 1$:

$$\forall x > 0,\ B(x) = \int_0^1 \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

IV.B.2) Le même théorème appliqué à l'expression précédente jusqu'à la dérivée p^{e} donnerait :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ B^{(p)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^p}{\partial x^p}\bigg(\ \ln(1-t)\big)^2 \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\bigg)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(\ln(1-t)\big)^2\,\big(\ln t\big)^p\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Fort heureusement, l'énoncé nous épargne la justification (tout à fait similaire à la précédente).

IV.B.3) Selon **I.F.2**, pour tout $r \geqslant 2$, $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Mais on vient de voir que :

$$\forall r \geqslant 2,\ \forall x > 0,\ B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \big(\ln(1-t)\big)^2\,\big(\ln t\big)^{r-2}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

et

– $\forall t \in\,]0\,;1[,\ \big(\ln(1-t)\big)^2\,\big(\ln t\big)^{r-2}\,t^{x-1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}$;

– $t \mapsto \dfrac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}$ est continue (par morceaux) sur $]0\,;1[$;

– on a la domination

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in\,]0\,;1[,\ \Big|\big(\ln(1-t)\big)^2\,\big(\ln t\big)^{r-2}\,t^{x-1}\Big| \leqslant \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2\big|\ln t\big|^{r-2}}{t}\,,$$

et cette fonction dominante est indépendante de x et continue (par morceaux) et intégrable sur $]0\,;1[$ d'après **I.F.2**.

En appliquant le théorème de convergence dominée lorsque $x \to 0^+$ (il faut en fait appliquer la caractérisation séquentielle de la limite, et considérer une suite (x_n) de réels positifs convergeant vers 0, comme à la question **II.C.5**), on obtient :

$$B^{(r-2)}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!}\lim_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x)\,.$$

IV.B.4) En particulier, $S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} B(x)$ et la formule du **IV.A** jointe au développement trouvé en **III.D.3** donne :

$$\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1}{x}\Big[\big(\psi(1)-\psi(x+1)\big)^2 + \big(\psi'(1)-\psi'(x+1)\big)\Big]\\
&\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{x}\Big[\big(\psi(1)-\psi(1)-\zeta(2)x+o(x)\big)^2 + \big(\zeta(2)-\zeta(2)+2\zeta(3)x+o(x)\big)\Big]\\
&\underset{x\to 0^+}{=} 2\zeta(3)+o(1)
\end{aligned}$$

ce qui redonne bien $S_2 = \zeta(3)$.

IV.C.

IV.C.1) • D'après **IIII-C-3** et **III-D** on a pour tout $x > -1, \psi(1+x) = \psi(1) + 1 - \dfrac{1}{1+x} + g(x)$.

Or d'après **III-D-1**, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1\,;+\infty[$ et r $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$, donc $x \mapsto \psi(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$ et par suite φ aussi.

- La formule de Leibniz (dérivée n^{e} d'un produit) donne, pour $x > -1$ et $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) = \big(\psi(x+1) - \psi(1)\big)\psi^{(n)}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(x+1)\psi^{(n-k)}(x+1) \\ + \psi^{(n)}(x+1)\big(\psi(x+1) - \psi(1)\big) - \psi^{(n+1)}(x+1)\end{aligned}$$

donc

$$\forall n \geqslant 2,\ \varphi^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(1)\psi^{(n-k)}(1) - \psi^{(n+1)}(1)\,.$$

IV.C.2) D'après **IV.A.**, $\varphi(x) = xB(x)$ pour tout $x > 0$ donc la formule de Leibniz entraine

$$\forall x > 0, \forall r \geqslant 3,\ (\varphi)^{(r-1)}(x) = xB^{(r-1)}(x) + (r-1)B^{(r-2)}(x)\,,$$

et par passage à la limite en 0 (φ est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0) :

$$\varphi^{(r-1)}(0) = (r-1) \lim_{x \to 0^+} B^{(r-2)}(x)\,,$$

soit d'après **IV.B.3** :

$$2S_r = \frac{(-1)^r}{(r-2)!} \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{r-1} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \varphi^{(r-1)}(0)\,.$$

Or d'après la formule démontrée à la question précédente :

$$\frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} = \sum_{k=1}^{r-2} \frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} \frac{\psi^{(r-1-k)}(1)}{(r-1-k)!} - \frac{\psi^{(r)}(1)}{(r-1)!}$$

et d'après **III-D-3**,

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^{k+1}\zeta(k+1)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}2S_r &= (-1)^r \left(\sum_{k=1}^{r-2} (-1)^{k+1}\zeta(k+1)(-1)^{r-k}\zeta(r-k) - (-1)^{r+1} r\zeta(r+1) \right) \\ &= r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k)\,.\end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆