# Problème 1 : CCP PSI 2013 adapté

**Notations :**

On note :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $[0,+\infty[$ .

Pour tout entier naturel $n$ on note $n!$ la factorielle de $n$ avec la convention $0! = 1$.

**Objectifs :**

L'objet de ce problème est d'expliciter la valeur d'une fonction (notée $\psi$) définie par une intégrale.

Dans la **partie I**, on étudie une fonction $f$ et l'on propose un procédé de calcul de la limite de $f$ en $+\infty$. La **partie II** est consacrée à l'étude de deux fonctions (notées $h$ et $\varphi$) qui seront utilisées dans la **partie III**.

## Partie I
## Étude d'une fonction et de sa limite

### I.1 Étude de la fonction $f$

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

**I.1.1** Montrer que $f$ est une fonction impaire dérivable sur $\mathbb{R}$.

**I.1.2** Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n$-ième de $f$ . Montrer qu'il existe une fonction polynôme $p_n$, dont on précisera le degré, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\exp(-x^2)$$

**I.1.3** Que peut-on dire de la parité de $p_n$ ?

**I.1.4** Démontrer que $f$ admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite).

Dans toute la suite du problème, on note $\Delta$ cette limite.

### I.2 Développpement en série de $f$

**I.2.1** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

**I.2.2** Expliciter $p_n(0)$.

### I.3 Les intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel $n$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

**I.3.1**

**I.3.1.a** Calculer $W_0$ et $W_1$ et justifier que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**I.3.1.b** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

**I.3.1.c** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

**I.3.2**

**I.3.2.a** Montrer que la suite $(W_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$.

**I.3.2.b** Justifier alors que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

### I.4 Calcul de $\Delta$

**I.4.1** Montrer que pour tout réel $u$, on a $\mathrm{e}^u \geqslant 1+u$.

**I.4.2** Soit $n$ un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu} & \text{si} \quad u \leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \frac{1}{(1+u)^n} & \text{si} \quad u > -1 \end{cases}$$

**I.4.3** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

(on justifiera l'existence de ces intégrales).

**I.4.4** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$W_{2n+1} \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leqslant W_{2n-2}.$$

En utilisant le résultat de **I.3.2.b**, calculer $\Delta$.

## Partie II
## Étude de deux fonctions

### II.1 Étude de la fonction $h$

**II.1.1** Justifier l'existence, pour tout réel $b$, de l'intégrale :

$$h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

**II.1.2** Démontrer que $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner la valeur de $h'(b)$ sous forme d'une intégrale.

**II.1.3** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $h$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre que l'on précisera.

**II.1.4** En déduire $h(b)$ en fonction de $b$ et $\Delta$.

### II.2 Étude de la fonction $\varphi$

**II.2.1** Montrer que l'on définit une fonction $\varphi$ paire et continue sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

**II.2.2** Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0,+\infty[$.

**II.2.3** À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\varphi$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre que l'on précisera.

**II.2.4** Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in ]\,0,+\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

## Partie III
## Calcul d'une intégrale

**III.1** Étude de la fonction $\psi$

**III.1.1** Vérifier que l'on définit une fonction $\psi$, continue sur $\mathbb{R}$, paire, en posant :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

**III.1.2** Calculer $\psi(0)$.

**III.2** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $j_p$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$j_p(x) = \int_0^p y \exp(-(1+x^2)y^2)\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que $(j_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}$. Expliciter sa limite.

**III.3** Désormais, $a$ désigne un réel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$k_n(y) = \int_0^n y \exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Expliciter sa limite.

**III.4** Soit $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^n j_p(x)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

**III.4.1** Justifier l'existence de $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et l'expliciter sous forme d'une intégrale.

**III.4.2** Montrer que $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^p k_n(y)\exp(-y^2)\,\mathrm{d}y$.

**Ce résultat exige un théorème désormais hors-programme, et pourra donc être admis.**

**III.5** Justifier l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$ de la fonction $y \mapsto k_n(y)\exp(-y^2)$.

**III.6** Calculer $\psi(x)$.