Corrigé problème 1 – CCP PSI 2013 enrichi et adapté

Partie I : Étude d'une fonction et de sa limite

I.1 Étude de la fonction f

I.1.1 La fonction $g : t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t$ est la primitive de g qui s'annule en 0 :

$$\boxed{f \text{ est une fonction dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient en utilisant la parité de g et le changement de variable $u = -t$:

$$f(-x) = \int_0^{-x} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}(-\mathrm{d}u) = -f(x).$$

Donc $\boxed{f \text{ est une fonction impaire.}}$

I.1.2 $f' = g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions, donc f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{P}(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

« *il existe une fonction polynôme p_n, de degré $n-1$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = p_n(x)\exp(-x^2)$* ».

- Pour tout réel x : $f'(x) = \exp(-x^2)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie : on a $p_1 : x \mapsto 1$, qui est bien une une fonction polynôme de degré 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On obtient alors pour tout x :

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)'}(x) = [p_n'(x) - 2xp_n(x)]\exp(-x^2).$$

  En notant $p_{n+1} : x \mapsto p_n'(x) - 2xp_n(x)$ on a bien une fonction polynôme de degré n donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a montré que $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

I.1.3 f est impaire et en dérivant n fois la relation « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$ » on obtient « $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}f^{(n)}(-x)$ » donc

$$\boxed{p_n \text{ est paire (respectivement impaire) quand } n \text{ est impair (respectivement pair).}}$$

I.1.4 La fonction $g : t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue positive sur $\mathbb{R}$.
Pour $t \geqslant 1$, $t \leqslant t^2$ donc $0 \leqslant \exp(-t^2) \leqslant \exp(-t)$, or $t \mapsto \exp(-t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par comparaison de fonctions positives g est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente, c'est-à-dire que $\boxed{f \text{ admet une limite finie en } +\infty}$ (notée Δ).

I.2 Développpement en série de f

I.2.1 On connaît le développement en série entière de la fonction exponentielle (rayon de convergence $+\infty$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\ .$$

Donc pour tout réel x :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\mathrm{d}t$$

On sait d'après le cours qu'une série entière converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence ; ici, la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}$ est de rayon de convergence infini, donc converge uniformément sur le segment $[0, x]$ (ou $[x, 0]$). On peut donc dans le calcul précédent intervertir somme et intégrale :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.}$$

Rem : on pouvait aller un peu plus rapidement en évoquant directement le théorème sur la primitivation d'une série entière, que j'ai en fait redémontré ici !

I.2.2 D'une part en utilisant **I.1.2** en $x = 0$, on a $p_n(0) = f^{(n)}(0)$.
D'autre part le développement précédent montre que f est développable en série entière au voisinage de 0 (avec un rayon de convergence infini) donc f coïncide avec la somme de sa série de Taylor $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
Par unicité du développement en série entière, on obtient :

$$\boxed{p_{2n}(0) = 0 \text{ et } p_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.}$$

I.3 Les intégrales de Wallis

I.3.1

I.3.1.a La fonction $x \longmapsto \cos^n x$ étant continue positive et non nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, son intégrale sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est strictement positive (théorème du cours).

Un calcul immédiat donne $\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.}$

I.3.1.b Une intégration par parties donne, pour $n \geqslant 2$:

$$W_n = \underbrace{\left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} dx = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$$

d'où $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

I.3.1.c En multipliant par W_{n-1} on obtient pour $n \geqslant 2$:

$$nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$$

c'est-à-dire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante, donc pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{nW_nW_{n-1} = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}\cdot}$

I.3.2

I.3.2.a Si $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos^{p+1} x \leqslant \cos^p x$ et donc $W_{p+1} \leqslant W_p$: $\boxed{\text{la suite } (W_p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

En utilisant la question **I.3.1.b** : $nW_n = (n-1)W_{n-2} \geqslant (n-1)W_{n-1}$, donc en divisant par W_{n-1} qui est strictement positif on obtient $\boxed{\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

I.3.2.b D'après ce qui précède, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$, donc $W_n \sim W_{n-1}$ et d'après la relation $W_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$, on déduit que $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2}n$ et comme $W_n > 0$, alors $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$

I.4 Calcul de Δ

I.4.1 Il suffit d'étudier la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u - 1 - u$ (décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$) pour voir qu'elle est toujours positive :

$$\boxed{\text{pour tout réel } u, \text{ on a } \mathrm{e}^u \geqslant 1 + u.}$$

I.4.2 Soit n un entier naturel non nul.
D'après la relation précédente appliqué à $-u$ on a pour $u \leqslant 1$: $0 \leqslant 1 - u \leqslant \mathrm{e}^{-u}$, on élève ensuite à la puissance n : $\boxed{(1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu} \text{ si } u \leqslant 1.}$

D'après la relation précédente appliqué à u on a pour $u > -1$: $0 < 1 + u \leqslant \mathrm{e}^u$, on élève ensuite à la puissance $-n$: $\boxed{\mathrm{e}^{-nu} \leqslant \frac{1}{(1+u)^n} \text{ si } u > -1.}$

I.4.3 Soit n un entier naturel non nul.

Pour $x \in [0,1]$, on a $x^2 \leqslant 1$ donc d'après la première des inégalités précédentes : $(1-x^2)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2}$ puis en intégrant sur $[0,1]$:
$\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ (car $\exp(-nx^2) \geqslant 0$). Cette dernière intégrale a bien un sens pour des raisons similaires à celles exposées en **I.1.4** (ou par comparaison à $\frac{1}{x^{2n}}$ en $+\infty$).

Par ailleurs la seconde relation du **I.4.3.** donne puisque $x^2 > -1$ (!) : $\mathrm{e}^{-nx^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ relation que l'on peut intégrer car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ converge (par comparaison à $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$). D'où finalement :

$$\boxed{\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}\,.}$$

I.4.4 En utilisant le changement de variable $x = \sin\theta$ ($\theta \mapsto \sin\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$) :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\mathrm{d}\theta = W_{2n+1}\ ;$$

Avec le changement de variable $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}u$ (changement affine donc de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \frac{\Delta}{\sqrt{n}}\ ;$$

et avec le changement de variable $x = \tan\theta$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2[$, bijectif de $[0,\pi/2[$ sur $[0,+\infty[$) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^n \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = W_{2n-2}\,.$$

La relation du **I.3.3** sécrit donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{W_{2n+1} \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leqslant W_{2n-2}.}$$

On a démontré en **I.3.2.b** que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, donc on obtient $W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc par passage à la limite $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \Delta \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Partie II : Étude de deux fonctions

II.1 Étude de la fonction h

II.1.1 Soit b un réel. $t \mapsto \cos(2bt)\exp(-t^2)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\left|\cos(2bt)\exp(-t^2)\right| \leqslant \exp(-t^2)$. On a vu que $t \mapsto \exp(-t^2)$ était intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $t \mapsto \cos(2bt)\exp(-t^2)$ est intégrable $[0,+\infty[$ par comparaison de fonctions positives d'où la convergence absolue, pour tout réel b, de l'intégrale :

$$\boxed{h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t.}$$

II.1.2 On applique ici le théorème sur la dérivée d'une intégrale à paramètre. Notons $g(b,t) = \cos(2bt)\exp(-t^2)$ pour $(b,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Vérifions les hypothèses de ce théorème :

- Pour tout réel b la fonction $t \mapsto g(b,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et y est intégrable comme cela a été vu plus haut.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $b \mapsto g(b,t)$ est dérivable et $\dfrac{\partial g}{\partial b}(b,t) = -2t\sin(2bt)\exp(-t^2)$ est continue par rapport à b et à t.

– $\forall (b,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial b}(b,t)\right| \leqslant 2t\exp(-t^2)$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable (par comparaison à $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

Le théorème du cours permet alors d'affirmer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\boxed{\forall b\in\mathbb{R}\ ,\ h'(b) = \int_0^{+\infty} -2t\sin(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t\,.}$$

II.1.3 On intègre par parties l'intégrale précédente, en prenant $u'(t) = -2t\exp(-t^2)$ et $v(t) = \sin(2bt)$ soit, pour tout réel b :

$$h'(b) = \int_0^{+\infty} -2t\sin(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\big[\sin(2bt)\exp(-t^2)\big]_{t=0}^{t=+\infty}}_{=0} -2b\int_0^{+\infty}\cos(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$$

l'intégration par parties étant justifié par le fait que $\lim\limits_{t\to+\infty}\sin(2bt)\exp(-t^2)$ existe, et vaut 0 (puisque la fonction sin est bornée). On a donc la relation :

$$\boxed{\forall b\in\mathbb{R}\ ,\ h'(b) = -2bh(b)\,.}$$

II.1.4 La résolution de cette équation différentielle ne pose pas de problème : il existe une constante C telle que, pour tout réel b on ait : $h(b) = C\mathrm{e}^{-b^2}$. Puis $C = h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Delta$ et finalement :

$$\boxed{\forall b\in\mathbb{R}\ ,\ h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-b^2)\,.}$$

II.2 Étude de la fonction φ

II.2.1 On utilise ici le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre :

- Pour $t>0$ fixé, $x\mapsto \mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x réel, $t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ est continue sur $]\,0,+\infty\,[$.
- Pour tout réel x et pour tout $t>0$, $0\leqslant \mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$, et la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'hypothèse de domination est vérifiée, et finalement :

$$\boxed{\varphi : x\mapsto \int_0^{+\infty}\exp\left(-t^2-\frac{x^2}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et est paire (évident).}}$$

II.2.2 On utilise maintenant le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre :

- L'hypothèse : pour tout réel x $t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ est continue et intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$ a déjà été vérifiée.
- $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}) = -\dfrac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}$ existe pour tout réel x et tout $t>0$.
- pour $t>0$ fixé, $x\mapsto -\frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout réel $x>0$, $t\mapsto -\frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ est continue sur $]\,0,+\infty\,[$
- Hypothèse de domination locale : soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$; pour $x\in[a,b]$ on a

$$\forall t>0,\quad 0\leqslant\left|-\frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\right|\leqslant\frac{2b}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}}.$$

  On montre facilement que $t\mapsto\frac{2b}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}}$ est intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$: elle est continue positive sur $]\,0,+\infty\,[$, prolongeable par continuité en $t=0$ (limite nulle par croissance comparée) et dominée pour $t\geqslant 1$ par $2b\mathrm{e}^{-t^2}$... Le théorème du cours permet donc de conclure :

$$\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur le segment } [a,b].$$

Ceci étant valable sur tout segment de $]\,0,+\infty\,[$, $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]\,0,+\infty\,[.}$

II.2.3 Pour $x>0$, $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\mathrm{d}t$. On pose $u=\dfrac{x}{t}$ (l'application $t\mapsto\dfrac{x}{t}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$). Avec $\mathrm{d}u = -\dfrac{x}{t^2}\mathrm{d}t$ on obtient :

$$\varphi'(x) = -2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/u^2-u^2}\mathrm{d}u \text{ soit } \boxed{\varphi'(x) = -2\varphi(x).}$$

II.2.4 La résolution de cette équation différentielle donne $\varphi(x) = K\exp(-2x)$ pour $x > 0$ avec K constante. Or φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $K = \lim_{0^+} \varphi = \varphi(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Enfin, par parité, on obtient : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-2|x|)\ .}$

Partie III : Calcul d'une intégrale

III.1 Étude de la fonction ψ

III.1.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{|\cos(2xt)|}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$; or $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, on montre alors à l'aide du théorème de continuité (j'ai ici passé les détails) que

$$x \mapsto \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

définit une fonction ψ continue sur $\mathbb{R}$ qui par ailleurs est clairement paire.

III.1.2 $\psi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - 0 = \frac{\pi}{2}$.

III.2 On peut voir $j_p(x)$ comme une intégrale à paramètre mais en fait elle se calcule :

$$j_p(x) = \int_0^p y\exp(-(1+x^2)y^2)\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{\exp(-(1+x^2)y^2)}{2(1+x^2)}\right]_{y=0}^{y=p} = \frac{1-\exp(-(1+x^2)p^2)}{2(1+x^2)}$$

Sous cette forme il est clair que j_p est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour x fixé $\boxed{\lim_{p\to+\infty} j_p(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)}.}$

III.3 $k_n(y) = \displaystyle\int_0^n y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = y\int_0^n \exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique là encore le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre pour démontrer la continuité de k_n :

- Pour x fixé, $y \mapsto y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$;
- pour $y \geqslant 0$, $x \mapsto y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)$ est continue sur $[0,n]$;
- soit $[0,\beta]$ un segment de $\mathbb{R}^+$, on a pour $y \in [0,\beta]$ la domination $|y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)| \leqslant \beta$ qui est une fonction constante donc continue et intégrable sur le segment $[0,n]$.

On peut donc conclure : $\boxed{(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de fonctions continues sur } \mathbb{R}^+\ .}$

Pour la convergence simple, on distingue deux cas :

- si $y = 0$, $k_n(0) = 0 \to 0$
- si $y > 0$, $x \mapsto \exp(-y^2x^2)\cos(2ax)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle y est continue et c'est un $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$ donc
  $k_n(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$. En posant alors $u = xy$:

$$\int_0^{+\infty} y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} y\exp(-u^2)\cos\left(2\frac{a}{y}u\right)\frac{1}{y}\mathrm{d}u = h\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{a^2}{y^2}\right)\ .$$

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} (k_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur } \mathbb{R}^+ \\ \text{et sa limite simple est la fonction } y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\dfrac{a^2}{y^2}\right) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y = 0 \end{cases}. \end{array}}$$

III.4 Soit $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^n j_p(x)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1 On utilise ici le théorème de convergence dominée :

– $x \mapsto j_p(x)\cos(2ax)$ est continue sur $[0,n]$;

– la suite de fonction (j_p) converge simplement sur $[0,n]$ et sa limite simple est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2(1+x^2)}$, continue sur $[0,n]$;

– domination : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $x \in [0,n]$, $|j_p(x)\cos(2ax)| \leqslant \dfrac{1}{2(1+x^2)} \leqslant 1$, qui est une fonction constante donc continue et intégrable sur $[0,n]$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} = \int_0^n \frac{1}{2(1+x^2)}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x\,.}$$

III.4.2 $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^n j_p(x)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = \int_0^n \left(\int_0^p y\exp(-(1+x^2)y^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,.$

Or $(x,y) \mapsto y\exp(-(1+x^2)y^2)\cos(2ax)$ est continue sur le pavé $[0,n]\times[0,p]$ donc par le théorème de Fubini :

$$\boxed{u_{n,p} = \int_0^p \left(\int_0^n y\exp(-(1+x^2)y^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^p k_n(y)\exp(-y^2)\,\mathrm{d}y\,.}$$

III.5 La fonction $y \mapsto k_n(y)\exp(-y^2)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour $y \geqslant 0$

$$|k_n(y)| = \left|\int_0^n y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant y\int_0^n 1.\,\mathrm{d}x = ny$$

donc $\left|k_n(y)\exp(-y^2)\right| \leqslant ny\exp(-y^2)$ ce qui montre l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$.

III.6 D'après III.4 et III.5, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{2}\int_0^n \frac{1}{1+x^2}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} k_n(y)\exp(-y^2)\,\mathrm{d}y$$

On passe maintenant à la limite quand $n \to +\infty$ à nouveau avec le théorème de convergence dominée. On pose $f_n(y) = k_n(y)\exp(-y^2)$:

– l'intégrabilité des f_n a été vue au III.5 ;

– la convergence simple se déduit de III.3 : (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et sa limite simple est la fonction $y \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{a^2}{y^2} - y^2\right) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y = 0 \end{cases}$.

– domination : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $y \geqslant 0$, on a $0 \leqslant |f_n(y)| \leqslant \exp(-y^2)\displaystyle\int_0^n y\exp(-y^2x^2)\,\mathrm{d}x$ d'où

$$0 \leqslant |f_n(y)| \leqslant \exp(-y^2)\int_0^{+\infty} y\exp(-y^2x^2)\,\mathrm{d}x = \exp(-y^2)\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)\,\mathrm{d}u = \exp(-y^2)\Delta$$

et la fonction dominante $y \mapsto \Delta\exp(-y^2)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On obtient ainsi :

$$\psi(a) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{a^2}{y^2} - y^2\right)\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\,\varphi(a)$$

soit en d'autres termes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \psi(x) = \sqrt{\pi}\,\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\exp(-2|x|)\,.}$$