Problème 2 : Centrale PSI 2012

- Dans le problème, λ désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définie en **I.A**, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur. Dans le cas typique $\lambda(t) = t$, L s'appelle la *transformation de Laplace*.

I. Préliminaires, définition de la transformation L.

I.A. Quelle inclusion exsiste-t-il entre les ensembles E et E' ?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,dt$$

I.B. Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

I.C. Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E.

II. Exemples dans le cas de f positive.

II.A. Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B. Dans les trois cas suivants, déterminer E :

II.B.1) $f(t) = \lambda'(t)$ avec λ supposée de classe $\mathscr{C}^1$.

II.B.2) $f(t) = \mathrm{e}^{t\lambda(t)}$.

II.B.3) $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C. Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

II.C.1) Déterminer E. Que vaut $Lf(0)$?

II.C.2) Prouver que Lf est dérivable.

II.C.3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait

$$Lf(x) - (Lf)'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cdot$$

II.C.4) On note $g(x) = \mathrm{e}^{-x}Lf(x)$ pour $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0,\ g(x) = \frac{\pi}{2} - A\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\,.$$

II.C.5) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

III. Etude d'un premier exemple.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} - 1 + \dfrac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

III.A. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.

III.B. Déterminer E.

III.C. A l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

III.D. Est-ce que $Lf(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

IV. Généralités dans le cas typique.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

IV.A. Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$) alors Lf est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV.B. Dans le cas particulier où $f(t) = \mathrm{e}^{-at} t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E, E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV.C. Comportement en l'infini.

On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$$

IV.C.1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k \right) \mathrm{e}^{-tx}\, dt = O(x^{-n-2})$$

IV.C.2) En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$, on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D. Comportement en 0.

On suppose ici que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

IV.D.1) Montrer que E contient $\mathbb{R}^{+*}$.

IV.D.2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers ℓ en 0^+.

V. Etude d'un deuxième exemple.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour tout $t > 0$, f étant prolongée par continuité en 0.

V.A. Montrer que E ne contient pas 0.

V.B. Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V.C. Montrer que E' contient 0.

V.D. Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V.E. En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

V.F. On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx}\, dt$. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V.G. Que vaut $Lf(0)$?

VI. Injectivité dans le cas typique.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI.A. Soit g une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^n g(t)\, dt = 0$$

VI.A.1) Que dire de $\displaystyle\int_0^1 P(t)g(t)\, dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

VI.A.2) On admet le résultat suivant (théorème de Weierstrass) :

Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$.

En déduire que g est l'application nulle.

VI.B. Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$. On pose $h(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-xu} f(u)\, du$ pour tout $t \geqslant 0$.

VI.B.1) Montrer que $Lf(x+a) = a \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} h(t)\, dt$.

VI.B.2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x+na) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$ converge et qu'elle est nulle.

VI.B.3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI.C. Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

VII. Etude en la borne inférieure de E.

VII.A. Cas positif.

On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure.

VII.A.1) Montrer que si Lf est bornée sur E, alors $\alpha \in E$.

VII.A.2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII.B. Dans cette question, $f(t) = \cos(t)$ et $\lambda(t) = \ln(1+t)$.

VII.B.1) Déterminer E.

VII.B.2) Déterminer E'.

VII.B.3) Montrer que Lf admet une limite en α, borne inférieure de E, et la déterminer.

VIII. Une utilisation de la transformation L.

Dans cette partie, $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels et on utilise la transformation L appliqué à des éléments de $\mathcal{P}$ pour l'étude d'un opérateur U.

VIII.A. Soient P, Q deux éléments de $\mathcal{P}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge.

VIII.B. Pour tout couple $(P,Q) \in \mathcal{P}^2$, on note

$$\langle P \,|\, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

Vérifier que $\langle . \,|\, . \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

VIII.C. On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ défini par

$$U(P)(t) = \mathrm{e}^t D(t\mathrm{e}^{-t}P'(t))$$

Vérifier que U est endomorphisme de $\mathcal{P}$.

VIII.D. Montrer que pour tous P, Q de $\mathcal{P}$ on a

$$\langle U(P) \,|\, Q\rangle = \langle P \,|\, U(Q)\rangle \ .$$

VIII.E. Montrer que U admet des valeurs propres dans $\mathbb{R}$, et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VIII.F. Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

VIII.F.1) Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

VIII.F.2) Quel lien y-a-t-il entre λ et le degré de P ?

VIII.G. Description des éléments propres de U.

On considère sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_n) \ : \ tP'' + (1-t)P' + nP = 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $P \in \mathcal{P}$.

VIII.G.1) En appliquant la transformation L avec $\lambda(t) = t$ à (E_n), montrer que si P est solution de (E_n) sur $[0,+\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1,+\infty[$.

VIII.G.2) Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1,+\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U.

VIII.G.3) Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(t) = \mathrm{e}^t D^n(\mathrm{e}^{-t}t^n)$?

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆