# CORRIGÉ DU DS°5

## SUJET n°1 (1 exercice + 1 problème)

### EXERCICE (extrait de E3A MP 2016)

**1.** Soit $x > 0$. Tout d'abord, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par les théorèmes généraux. Ensuite, pour tout $a \geqslant 0$ :

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} = \left[\frac{1}{2x}\operatorname{Arc}\tan(2xt)\right]_{t=0}^{t=a} = \frac{\operatorname{Arc}\tan(2ax)}{2x} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4x}$$

Ce calcul montre à la fois que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{4x}}$.

*Rem : pour montrer simplement l'existence, il suffisait de remarquer que* $\frac{1}{1+4t^2x^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4t^2x^2}$ *et utiliser l'intégrabilité de la fonction de Riemann* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *au voisinage de* $+\infty$.

**2.** Pour $x = 0$, la série est grossièrement divergente.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^*$. Alors : $\dfrac{1}{1+4n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2x^2}$ ; or la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de signe constant et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$ converge d'après les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs.

Ainsi : $\boxed{F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}^*\text{, et bien sûr } F \text{ est paire.}}$

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$. On applique le théorème de dérivation d'une série de fonctions.

- $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$ par les théorèmes généraux.
- D'après **2.**, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[a\,;b]$.
- Ensuite, pour tout $x \in [a\,;b]$ : $u_n'(x) = -\dfrac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}$, donc :

$$|u_n'(x)| \leqslant \frac{8n^2x}{16n^4x^4} = \frac{1}{2n^2x^3} \leqslant \frac{1}{2n^2a^3}.$$

  On en déduit $\|u_n\|_\infty^{[a;b]} \leqslant \dfrac{1}{2n^2a^3}$ et comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a\,;b]$, donc aussi uniformément.

Le théorème du cours permet donc de conclure que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, et a pour dérivée $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}$. Il en sera donc de même sur la réunion de tous ces segments, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+^*$, et par parité on conclut :

$$\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } F'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2} \text{ pour tout } x \neq 0.}$$

**4.** Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ étant continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\forall\, t \in [k-1\,;k],\ \frac{1}{1+4k^2x^2} \leqslant \frac{1}{1+4t^2x^2},$$

donc, en intégrant sur $[k-1\,;k]$ et par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{1+4k^2x^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}\ ,$$

soit :

$$\frac{1}{1+4k^2x^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}\ .$$

En sommant ces inégalités pour $k \in [\![1\,;n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient, grâce à la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+4k^2x^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} = \int_{0}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}.$$

Nous pouvons faire tendre $n$ vers $+\infty$ d'après les questions **1.** et **2.** et on en déduit :

$$\boxed{\forall\, x > 0,\ F(x) \leqslant \frac{\pi}{4x}\cdot}$$

*Rem : par rapport à l'énoncé, j'ai directement remplacé l'intégrale* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$ *par sa valeur.*

**5.** Soit $x > 0$. Comme dans la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} \leqslant \frac{1}{1+4k^2x^2}\ ,$$

donc en sommant ces inégalités pour $k \in [\![0\,;n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$ on obtient :

$$\int_{0}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} = \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+4k^2x^2}\ ,$$

et enfin, en faisant $n \to +\infty$ :

$$\frac{\pi}{4x} \leqslant 1 + F(x) \text{ donc : } \boxed{\forall\, x > 0,\ F(x) \geqslant \frac{\pi}{4x} - 1.}$$

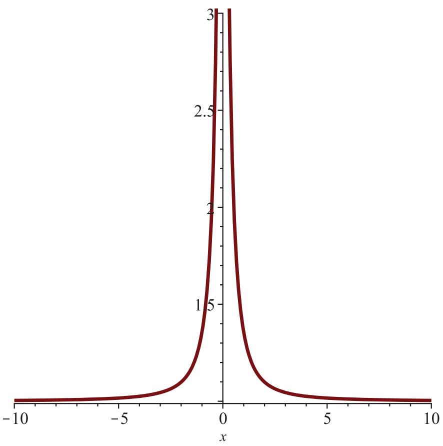
**6.** • Pour tout $x > 0$, d'après **4.** : $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4x}$ , donc par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$

• Pour $x > 0$, d'après **4.** et **5.** : $1 - \dfrac{4x}{\pi} \leqslant \dfrac{4xF(x)}{\pi} \leqslant 1$, donc par encadrement : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{4xF(x)}{\pi} = 1$, c'est-à-dire : $\boxed{F(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{4x}\cdot}$

**7.** *1ère solution :* Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, d'après **3.** : $F'(x) = -8x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+4n^2x^2)^2}$, donc $F'(x)$ est du signe de $-x$. Conclusion : $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

*2ème solution :* Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{1}{1+4k^2y^2} \leqslant \dfrac{1}{1+4k^2x^2}$ , donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+4k^2y^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+4k^2x^2}$, et enfin après passage à la limite : $F(y) \leqslant F(x)$. La fonction $F$ est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité.

L'allure du graphe de $F$ ne pose pas de problème, compte tenu des résultats précédents :



**8.** Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur $\dfrac{1}{2x}$ car : $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $e^{2xt-1} \underset{t\to 0}{\sim} 2xt$.

Pour tout $t > 0$ : $\left|\dfrac{\sin t}{e^{2xt} - 1}\right| \leqslant \dfrac{1}{e^{2xt} - 1} \underset{t\to 0}{\sim} e^{-2xt}$ ; or la fonction $t \mapsto e^{-2xt}$ est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $x > 0$ (intégrale de référence). Il en découle que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

En conséquence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}\, dt$ est absolument convergente, donc convergente, et :

$$\boxed{G \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

**9.** Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x > 0$ :

$$\int_0^x e^{-\alpha t} \sin t dt = \mathcal{I}m\left(\int_0^x e^{(i-\alpha)t} dt\right) = \mathcal{I}m\left(\left[\frac{e^{(i-\alpha)t}}{i-\alpha}\right]_{t=0}^{t=x}\right) = \mathcal{I}m\left(\frac{e^{(i-\alpha)x} - 1}{i-\alpha}\right).$$

Quand $x \to +\infty$, $e^{(i-\alpha)x} = e^{ix} e^{\alpha x} \to 0$ puisque la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est bornée ; donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin t dt$ existe et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin t dt = \mathcal{I}m\left(\frac{1}{\alpha - i}\right) = \mathcal{I}m\left(\frac{\alpha + i}{\alpha^2 + 1}\right) = \frac{1}{\alpha^2 + 1}\cdot$$

**10.** Pour tous $t > 0$ et $x > 0$ on a $0 \leqslant e^{-2xt} < 1$ donc la série géométrique de terme général $e^{-2nxt} \sin t$ converge, et avec les formules du cours :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nxt} \sin t = e^{-2xt} \sin t \times \frac{1}{1 - e^{-2xt}} = \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}\cdot$$

**11.** Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : t \mapsto e^{-2nxt} \sin t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la série $\sum e^{-2nxt} \sin t$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente vers la fonction continue $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$.

*Il s'agit donc ici d'utiliser ici un des deux théorèmes qui permettent d'intervertir la sommation et l'intégrale ; on pourrait utiliser le théorème de convergence dominée appliqué à la suite des somme partielles, mais sa mise en oeuvre est plus compliquée.*

*On songe donc à utiliser le deuxième théorème, celui que le programme officiel appelle « intégration terme à terme » ; mais la majoration brutale $|\sin(t)| \leqslant 1$ ne convient pas ; il faut utiliser la majoration plus subtile $|\sin t| \leqslant |t|$ .*

À l'aide d'une intégration par parties on a, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^y |u_n(t)|\, dt \leqslant \int_0^y t e^{-2nxt}\, dt = \left[-\frac{t e^{-2nxt}}{2nx}\right]_{t=0}^{t=y} + \frac{1}{2nx}\int_0^y e^{-2nxt}\, dt$$
$$\leqslant -\frac{y e^{-2nxy}}{2nx} + \frac{1}{(2nx)^2}\left[-e^{-2nxt}\right]_0^y.$$

On en déduit, en faisant tendre $y$ vers $+\infty$ :

$$\int_0^{+\infty} |u_n| \leqslant \frac{1}{4x^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n|$ l'est aussi et le théorème d'intégration terme à terme ( appliqué sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ ) donne :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4n^2x^2} 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2nxt} \sin t dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nxt} \sin t dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} dt = G(x)\,.$$

**PROBLÈME (E3A PSI 2016, 3 heures)**

# Préliminaires

**1.** On écrit que :

$$u = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On distingue alors trois cas.

- Si $\theta \in [0,\pi[$ alors $\cos(\theta/2) > 0$. On a alors $|u| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \frac{\theta}{2}$.
- Si $\theta = \pi$ alors $u = 0$. Le module est nul et l'argument non défini.
- Si $\theta \in ]\pi, 2\pi[$ alors $\cos(\theta/2) < 0$. On a alors $|u| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \pi + \frac{\theta}{2}$.

**2. a) i)** Le calcul donne :

$$P_1 = 3X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1.$$

**ii)** Il est immédiat que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ étant les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle (ou encore à discriminant négatif), ni $P_1$ (qui admet $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ comme racines) ni $P_2$ (qui est de degré 4) ne sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

**b) i)** $P_n$ est différence de deux polynômes de degré $2n+1$ et est donc dans $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$. Le coefficient de $X^{2n+1}$ dans $P_n$ est :

$$\frac{1}{2i}(1-1) = 0$$

et donc $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Le coefficient de $X^{2n}$ dans $P_n$ est :

$$\frac{1}{2i}\left((2n+1)i - (2n+1)(-i)\right) = 2n+1 \neq 0.$$

Ainsi, $P_n$ est de degré $2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.

*Autre solution : on pouvait écrire grâce à la formule du binôme :*

$$P_n = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left(\frac{i^k - (-i)^k}{2i}\right)X^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathcal{Im}\,(i^k)X^{2n+1-k},$$

*et puisque $\mathcal{Im}\,(i^k) = 0$ lorsque $k$ est pair, il ne subsiste finalement que les termes d'indices impairs $k = 2p+1$ donc :*

$$P_n = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2n-2p},$$

*ce qui permet de retrouver le résultat demandé.*

**ii)** *Question de cours de 1ère année...*
Les racines $N$-ièmes de l'unité sont les complexes

$$e^{\frac{2ik\pi}{N}} \quad \text{pour} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

**iii)** On a :

$$P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n.$$

**iv)** Si $P_n(z) = 0$ alors $(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$ donc $|z+i| = |z-i|$. Ainsi $z$ se trouve sur la médiatrice du segment $[-i, i]$ c'est-à-dire sur l'axe réel.

**v)** Supposons que $a$ soit racine de $P_n$. On a alors $a \neq i$ (on vient de voir que $P_n(i) \neq 0$) donc cela équivaut à $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$. Il existe donc $k \in [\![0\,;2n]\!]$ tel que

$$\frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

soit encore :

$$a + i = (a-i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

et donc :

$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1).$$

On remarque alors que $k \neq 0$ car pour $k = 0$ la relation précédente est fausse $(0 \neq i)$.

Réciproquement, si $a(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/(2n+1)}-1)=\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/(2n+1)}+1)$ avec $k\in[\![1\,;2n]\!]$, on a $(a+\mathrm{i})=(a-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}$. En élevant à la puissance $2n+1$ on trouve que $(a+\mathrm{i})^{2n+1}=(a-\mathrm{i})^{2n+1}$ et donc que $P_n(a)=0$.

**vi)** Les racines de $P_n$ sont donc les nombres :

$$a_k=\frac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/(2n+1)}+1)}{(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/(2n+1)}-1)}=\mathrm{i}\frac{2\cos(k\pi/(2n+1))}{2\mathrm{i}\sin(k\pi/(2n+1))}=\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k=1,\dots,2n$. On trouve bien des récines toutes réelles.

*Remarque : cotan étant bijective de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$ et les $2k\pi/(2n+1)$ étant distincts dans $]0,\pi[$, les $a_k$ sont 2 à 2 distincts ; $P_n$ possède donc $2n$ racines distinctes réelles.*

**vii)** On a déjà =fait le calcul à la question **2.b.i)** :

$$P_n(X)=Q_n(X^2)\quad\text{avec}\quad Q_n(X)=\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^pX^{n-p}.$$

**viii)** D'après les calculs de la question **2.a.i)** :

$$Q_1=3\left(X-\frac{1}{3}\right)\quad\text{et}\quad Q_2=5X^2-10X+1=5\left(X-\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\left(X-\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right).$$

**ix)** Si $a$ est racine de $P_n$ alors $a^2$ est racine de $Q_n$. En particulier, on a les racines

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k=1,\dots,n$. Ces racines sont distinctes car les $k\pi/(2n+1)$ sont $n$ nombres distincts de $]0,\pi[$. Ceci donne $n$ racines distinctes de $Q_n$ qui est de degré $n$ et donc toutes les racines.

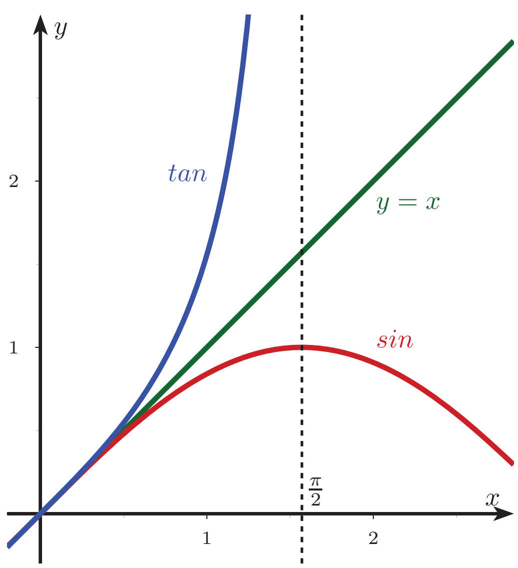
**3.** $S_n$ est la somme des racines $b_k$ de $Q_n$ qui est scindé à racines simples et s'écrit (son coefficient dominant est celui de $P_n$) :

$$Q_n=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X-b_k)=(2n+1)\left(X^n-\sum_{k=1}^{n}b_kX^{n-1}+\cdots+(-1)^nb_1\dots b_n\right).$$

Le coefficient de $X^{n-1}$ dans $Q_n$ vaut $-\binom{2n+1}{2n-2}$ d'après **2.b.vii)**, et il est aussi égal à $-(2n+1)S_n$. On a donc (relations coefficients-racines) :

$$S_n=\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2}=\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3}=\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

**4.** •Les inégalités demandées se démontrent aisément en étudiant rapidement les fonctions $x\mapsto x-\sin x$ et $x\mapsto\tan x-x$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Graphiquement :



- Comme $y \mapsto 1/y^2$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)} \cdot$$

**5.** Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ; on peut donc appliquer à chacun de ces nombres les inégalités précédentes, puis en sommant pour $k$ de 1 à $n$ on en tire :

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant n + S_n$$

ce qui donne :

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2(n+S_n)}{(2n+1)^2} \cdot$$

Puisque $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$, majorant et minorant ont pour limite $\pi^2/6$ quand $n \to +\infty$. Par théorème d'encadrement, il en est de même pour le terme du milieu de notre double inégalité. La série proposée converge (ce que l'on sait car c'est une série de Riemann convergente) et :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot$$

# Partie I

**1.** $t \mapsto t^s \ln(t)$ est continue sur $]0\,;1]$, donc on a un unique problème au voisinage de $0$.
Or, puisque $s > -1$, il existe $\alpha$ tel que $s > \alpha > -1$ et alors $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{-\alpha} t^s \ln t = \lim\limits_{t\to 0^+} t^{s-\alpha} \ln t = 0$, puisque $s - \alpha > 0$, par croissances comparées.
Donc $t^s \ln(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{-\alpha}}\right)$, et puisque $-\alpha < 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{-\alpha}}$ est une fonction de Riemann intégrable au voisinage de $0$. D'après les théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, la fonction $t \mapsto t^s \ln(t)$ est elle aussi intégrable au voisinage de $0$, et $J_s$ existe.

Sous réserve d'existence, une intégration par parties donne

$$J_s = \left[\frac{t^{s+1}}{s+1} \ln(t)\right]_0^1 - \frac{1}{s+1} \int_0^1 t^s \,\mathrm{d}t.$$

Le terme entre crochets admet une limite en $0$ (nulle par croissances comparées) et l'intégration par parties est licite. On en conclut :

$$J_s = -\frac{1}{s+1} \int_0^1 t^s \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(s+1)^2} \cdot$$

**2. a)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto \dfrac{t^x \ln(t)}{(t-1)} \cdot$

$f_x$ est continue positive sur $]0\,;1[$, et prolongeable par continuité en 1 par la valeur 1 car $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} (t-1)$.
En $0^+$, $f_x$ est équivalente à $-t^x \ln(t)$ donc si $x > -1$, $f_x$ est intégrable au voisinage de $0$ d'après la question précédente.
Si $x \leqslant -1$, $\lim\limits_{t\to 0^+} t f_x(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} -t^{x+1} \ln t = +\infty$, donc il existe un voisinage de $0^+$ sur lequel $t f_x(t) \geqslant 1$, soit $f_x(t) \geqslant \dfrac{1}{t}$, et par suite $f_x$ n'est pas intégrable au voisinage de $0$.
En conclusion :

$$D_H = ]-1\,;+\infty[$$

**b)** Si $x \leqslant y$ alors pour tout $]0\,;1[$, $t^x = \exp(x \ln(t)) \geqslant \exp(y \ln(t)) = t^y$ (car $\ln(t) \leqslant 0$). On multiplie par $\frac{\ln(t)}{t-1} \geqslant 0$ et on intègre sur $]0\,;1[$ quand $x > -1$. On en déduit que :

$$\text{pour } -1 < x \leqslant y, \; H(x) \geqslant H(y)$$

et $H$ est donc décroissante sur son domaine.

**c)** Soit $(x_n)$ une suite réelle de limite $+\infty$. On peut évidemment supposer $x_n > -1$ pour tout $n$, de sorte que $H(x_n)$ a bien un sens.

On peut écrire $H(x_n) = \displaystyle\int_0^1 u_n(t)$, où $u_n \colon t \mapsto \dfrac{t^{x_n}\ln(t)}{(t-1)}$.

Pour $t$ fixé dans $]0\,;1[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t^{x_n} = 0$ donc la suite $(u_n)$ converge simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction nulle.

De plus, si l'on se fixe $a > -1$, on aura $x_n \geqslant a$ à partir d'un certain rang $n_0$ donc

$$\forall\, n \geqslant n_0, \forall\, t \in\, ]0\,;1[,\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant \frac{t^a \ln t}{t-1}\,.$$

La fonction $t \mapsto \frac{t^a \ln t}{t-1}$ est continue et intégrable sur $]0\,;1[$ : l'hypothèse de domination est vérifiée.

Le théorème de convergence dominé s'applique donc, et donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H(x_n) = 0$.

Enfin, par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

*La méthode proposée par l'énoncé est standard, mais bien compliquée ici ! On pouvait en effet démontrer le résultat à l'aide d'une majoration « élémentaire » :*

*Soit $x > 0$. La fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0\,;1[$ et prolongeable par continuité en $0$ (valeur $0$) et $1$ (valeur $1$). C'est donc une fonction bornée sur $]0\,;1[$. On a donc :*

$$\forall x > 0,\ |H(x)| \leqslant \|g\|_\infty \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \frac{\|g\|_\infty}{x}$$

*et on en déduit directement que :*

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0.$$

**d)** On a

$$H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)\ln(t)}{t-1}\, dt = -J_x = \frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

**e)** $H$ étant continue en $0$ (admis), $H(x+1) \to H(0)$ quand $x \to -1$, donc est négligeanle devant $\frac{1}{(x+1)^2}$ au voisinage de $-1$. Ainsi la question précédente implique :

$$H(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

**f) i)** On a $\dfrac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$ qui est le terme d'une série positive convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(x+k)^2}$ converge.

**ii)** On démontre l'égalité proposée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Initialisation* : pour $n = 1$, l'égalité découle directement de **2.d**.
- *Hérédité* : soit $n \geqslant 1$ tel que le résultat est vrai au rang $n$. La question **2.d** utilisée avec $x+n$ donne alors

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{(x+n+1)^2} + H(x+n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n+1)\,, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat au rang $n+1$.

**iii)** Comme $H$ est de limite nulle en $+\infty$ et comme la série converge, on peut faire tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'égalité précédente pour obtenir :

$$H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

**iv)** En particulier :

$$H(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

$$H(1) = H(0) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1\,.$$

# Partie 2

**1.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{1}{(x+t)^2}$ est décroissante sur l'intervalle $[k\,;k+1]$. On en déduit que

$$\forall\, t \in [k\,;k+1],\ h_x(k+1) \leqslant h_x(t) \leqslant h_x(k)$$

puis en intégrant sur $[k\,;k+1]$ :

$$h_x(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} h_x(t)\,dt \leqslant h_x(k)$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1}{(x+k)^2}\,.$$

**2.** On somme ces inégalités pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k+1)^2} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{(x+t)^2} = \left[-\frac{1}{t+x}\right]_{t=1}^{t=n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Tous les termes admettent une limite quand $n \to +\infty$ et le passage à la limite donne :

$$H(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant H(x)$$

ou encore :

$$\frac{1}{1+x} \leqslant H(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

Majorant et minorant possédant en $+\infty$ l'équivalent commun $1/x$, on en déduit (en divisant par $1/x$ puis en utilisant le théorème des gendarmes) que :

$$H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\,.$$

**3. a)** $H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ d'après ci-dessus, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique.

$((-1)^n u_n)$ est une suite de limite nulle ($H$ est de limite nulle en $+\infty$), alternée ($H$ est positive) et décroissante en valeur absolue ($H$ est décroissante). Le critère spécial pour les séries alternées indique alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge.

**b)** Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto (-1)^n \dfrac{t^n \ln(t)}{t-1}$.

- les $f_n$ sont continues sur $]0\,;1[$ .
- Pour tout $t \in ]0\,;1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(t)$ est une série géométrique de raison $-t$, donc convergente ; sa somme est la fonction

$$S : t \mapsto \frac{\ln t}{t-1} \sum_{n=0} +\infty(-t)^n = \frac{\ln t}{t^2-1}$$

donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1[$ vers $S$ continue ;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in ]0\,;1[$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| = \left|\frac{(1-(-t)^{n+1})\ln(t)}{t^2-1}\right| \leqslant \frac{2|\ln(t)|}{1-t^2} = \varphi(t)$$

et la fonction $\varphi$ est continue sur $]0\,;1[$, prolongeable par continuité en $1$ (valeur $1$) et équivalente en $0$ à $t \mapsto 2\,|\ln t|$ (fonction intégrable de référence) ; $\varphi$ est donc intégrable sur $]0\,;1[$.

Par le théorème de convergence dominée appliqué aux séries, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

**c)** L'application $t \mapsto \sqrt{t}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1[$ et strictement monotone, on peut effectuer le changement de variable $v = \sqrt{t}$ pour obtenir :

$$\int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1}\,\mathrm{d}vv = \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{t})}{t-1}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{4}H\left(-\frac{1}{2}\right)\,.$$

*En écrivant* $\dfrac{1}{1-v^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v^{2k}$ *pour* $v \in \,]0\,;1[$ *puis en utilisant le théorème d'intégration terme à terme on pourrait montrer que l'intégrale ci-dessus est égale à* $\dfrac{\pi^2}{2}$.

# Partie 3

**1. a)** Pour $p \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto t^p(\ln t)^q$ se prolonge en une fonction continue sur $[0\,;1]$ donc l'intégrale existe.

Pour $p = 0$, la fonction $t \mapsto (\ln t)^q$ est continue sur $]0\,;1]$ et c'est un $o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en $0$ (croissances comparées), d'où l'intégrabilité par comparaison à une fonction de Riemann intégrable.

**b)** Une intégration par parties donne

$$I_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q\right]_0^1 - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

l'intégration par parties étant licite puisque le terme entre crochets est de limite nulle en $0$ (croissances comparées). Donc :

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}.$$

**c)** On prouve alors par récurrence (sur $q$) que :

$$I_{p,q} = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^q}I_{p,0} = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}\,.$$

**2. a)** $t \mapsto \dfrac{(\ln t)^{n+1}}{t-1}$ est continue sur $]0\,;1[$, négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de $0$ (croissances comparées) et prolongeable par continuité en $1$ (valeur $1$ si $n = 0$ et $0$ si $n \geqslant 1$). C'est donc une fonction intégrable sur $]0\,;1[$ et $B_n$ existe.

**b)** On sait que :

$$\forall t \in \,]0\,;1[,\ \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\,.$$

Posons donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : t \mapsto (\ln t)^{n+1}t^k$ ($n$ est fixé).

- les $g_k$ sont toutes continues sur $]0\,;1[$.
- la série $\sum g_k$ converge simplement sur $]0\,;1[$ et sa limite simple est la fonction $t \mapsto \dfrac{(\ln t)^{n+1}}{t-1}$ qui est continue sur $]0\,;1[$.
- $\displaystyle\int_0^1 |g_k| = (-1)^{n+1}\int_0^1 g_k = (-1)^{n+1}I_{k,n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente car $n+2 \geqslant 2 > 1$.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne :

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 g_k = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{k,n+1}$$

**c)** Avec la question 1, on en déduit (avec changement d'indice) que

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1}(n+1)!Z_{n+2}.$$

**3.** Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que

$$t^x = \mathrm{e}^{x \ln t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x \ln t)^k}{k!}$$

donc

$$\forall x > -1,\ H(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^{k+1}}{t-1} \frac{x^k}{k!} \,\mathrm{d}t\,.$$

Fixons alors $x \in \left]-1\,;1\right[$ et notons $h_k : t \mapsto \dfrac{(\ln t)^{k+1}}{t-1} \dfrac{x^k}{k!}$.

- les $h_k$ sont continues sur $\left]0\,;1\right[$.
- la série $\sum h_k$ converge simplement sur $\left]0\,;1\right[$ et sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{t^x \ln t}{t-1}$ qui est continue sur $\left]0\,;1\right[$.
- On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \left]0\,;1\right[,\ \left|\sum_{k=0}^{n} h_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |h_k(t)| = \frac{t^{-|x|}|\ln(t)|}{|t-1|}$$

  Comme $|x| < 1$, $-|x| > -1$ et le majorant est intégrable sur $\left]0\,;1\right[$.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour intervertir somme et intégrale et conclure que

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[,\ H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) Z_{k+2} x^k\,.$$

*Pour l'interversion, on pouvait aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme puisque*

$$\int_0^1 |h_k| = |B_k| \frac{|x|^k}{k!} = (k+1) Z_{k+2} \, |x|^k \leqslant (k+1) Z_2 \, |x|^k$$

*terme général d'une série convergente pour* $|x| < 1$*, par exemple par la règle de d'Alembert.*