SUJET n°2 (1 problème)

PROBLÈME (MINES MP 2016)

Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

A. Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

1. Démontrer que $\psi\,:\,u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

3. ~~Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.~~

Comme nous ne l'avons pas encore vu en cours, on admettra ici que :
- F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- et que : $\forall\, x \in I,\ F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u\,.$

4. En déduire que pour tout $x \in I,\ xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K\,.$

5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I,\ G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

B. Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

7. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

8. Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$

En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

9. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

10. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

11. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

C. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim\limits_{x\to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

12. Quel est l'ensemble I_a si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

13. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Card}(A(n))\mathrm{e}^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n))\mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} \cdot$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

14. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.
Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p,q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

15. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

D. Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \right) = \ell \in [0\,;+\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0\,;1]$. On munit E de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0;1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \psi(\mathrm{e}^{-nx}).$$

16. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ des applications de I dans $\mathbb{R}$. Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E_1, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim\limits_{x \to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x \to 0} x(L(\psi))(x).$$

17. Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \ \|_\infty)$.

18. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0\,;1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$.
En déduire que $E_0 \subset E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour cette dernière question on admettra le théorème de Stone-Weierstrass :
TOUTE FONCTION CONTINUE SUR $[0\,;1]$ EST LIMITE UNIFORME SUR CET INTERVALLE D'UNE SUITE DE FONCTIONS POLYNÔMES.

Pour tous $a, b \in [0\,;1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a;b]} : [0\,;1] \to \{0, 1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a;b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a\,;b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0\,;1[$ et $\varepsilon \in]0\,;\min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,;a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon\,;a[\\ 0 & \text{si } x \in [a\,;1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,;a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a\,;a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon\,;1]. \end{cases}$$

19. Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0;a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0;a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0\,;1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]. \end{cases}$$

20. Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) tels que $n = p^2 + q^2$.

21. Si $A \in S$, que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \mathrm{Card}\,(A(n))$? Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} v(k)$.