SUJET n°2 (1 problème)

PROBLÈME (MINES MP 2016)

A. Une intégrale à paramètre

1. La fonction $\psi\ :\ u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur I par théorèmes généraux.

On a $\psi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1/2}}$; or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ est une fonction de Riemann intégrable sur $]0\,;1]$, donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $]0\,;1]$.

De plus, par croissances comparées, $u^2\psi(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\psi(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$; or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est une fonction de Riemann intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

Ainsi, $\boxed{\psi\ :\ u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \text{ est intégrable sur } I.}$

2. Pour que $F(x)$ existe, il faut au moins (conformément au programme) que la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ soit définie et continue par morceaux sur I, ce qui n'est réalisé que pour $x \geqslant 0$.

Pour $x = 0$, on a $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{3/2}}$; or la fonction de Riemann $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, donc par comparaison de fonctions positives, il en est de même de $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$.

Enfin, si $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{xu^{1/2}}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$, donc comme dans la question précédente on peut conclure que $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est intégrable sur I.

Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble les valeurs de } x \text{ pour lesquelles } F(x) \text{ est définie est } I =]0\,;+\infty[.}$

3. Posons $f\colon (x,u) \in I^2 \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$

- On a déjà vu que, pour tout $x \in I$, la fonction $u \longmapsto f(x,u) = \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue et intégrable sur I .
- Pour tout $u \in I$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I , et admet comme dérivée la fonction $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$.
- La fonction $u \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$ est continue (par morceaux) sur I.
- Soit $a > 0$. On a l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a\,;+\infty[,\ \forall u \in I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$$

  et la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$ est continue et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ (la démonstration de l'intégrabilité étant analogue aux précédentes).

En conclusion, avec les hypothèses précédentes, le théorème de régularité des intégrales dépendant d'un paramètre permet d'affirmer que :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \text{ et } F' : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u.}$$

4. Soit $x \in I$. En écrivant $x = (u+x) - u$ on a :

$$xF'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}(x+u)}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}u}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

soit : $xF'(x) = -F(x) + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u$.

On effectue une intégration par parties (les fonctions sont bien de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}(u+x)} - \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right) u\d{u}\,,$$

et le terme entre crochets est nul par croissances comparées, ce qui valide l'intégration par parties. On a donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u\,.$$

(on a bien le droit de couper l'intégrale en 2 car on a reconnu $F(x)$, donc une intégrale convergente).

Ainsi : $xF'(x) = -\frac{1}{2}F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u$

soit

$$xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-x\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-(x+u)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u = -K\,.$$

On a bien démontré : $\boxed{\text{pour tout } x \in I,\ xF'(x) - (x - \tfrac{1}{2})F(x) = -K.}$

5. La fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ par produit et on a :

$$G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}F(x) - \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F(x) + \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left(xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x)\right)$$

donc $G'(x) = -K\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$.

Il en résulte que la fonction $x \mapsto G(x) + K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est de dérivée nulle, donc est constante sur l'intervalle I.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe une constante réelle } C \text{ telle que pour tout } x \in I,\ G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\,.}$

6. • Soit $x > 0$. On peut effectuer dans l'expression intégrale de $G(x)$ le changement de variable affine $u = tx$ qui conduit à :

$$G(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(tx+x)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

On considère alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I qui converge vers 0.

Posons alors $f_n : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-tx_n}}{\sqrt{t}(t+1)}$, de sorte que $G(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$, et $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$.

On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- Les fonctions f_n sont continues (par morceaux) sur I.
- La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I, et f est continue (par morceaux) sur I.
- De plus $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}}$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$; ainsi comme dans la question **1.**, f est intégrable sur I, et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant f(t).$$

Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Par caractérisation séquentielle de la limite,

$$\lim_{x\to0} G(x) = \lim_{x\to0} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale, ce qui se fait classiquement en utilisant le changement de variable $v = \sqrt{t}$ (de classe $\mathscr{C}^1$ bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v = 2\left[\arctan(v)\right]_{v=0}^{v\to+\infty} = \pi$$

donc $\boxed{\lim_{x\to 0} G(x) = \pi.}$

• Pour $x > 0$, on a $0 \leqslant G(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t$,

donc par théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.}$

• La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ étant continue et intégrable sur I, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 0$, et puisque $G(x) = C - K\cdot\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, on a donc $C = \pi$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = K$, donc $0 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \pi - K^2$, et puisque $K \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, on en tire : $\boxed{K = \sqrt{\pi}.}$

B. Étude de deux séries de fonctions

7. • Soit $x > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-nx} = (\mathrm{e}^{-x})^n$. Or la série géométrique de terme général $(\mathrm{e}^{-x})^n$ converge puisque $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$, donc par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

Rem : on pouvait aussi utiliser $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

• On utilise ici le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.

– Pour $n \geqslant 1$, la fonction $u_n \colon x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est continue sur I par les théorèmes usuels.

– Soit $a > 0$. On a :

$$\forall x \in [a\,;+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-na}}{\sqrt{n}}$$

donc $\|u_n\|_\infty^{[a;+\infty[} = \dfrac{\mathrm{e}^{-na}}{\sqrt{n}}$, qui est le terme général d'une série convergente comme cela a déjà été vu.

Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[a\,;+\infty[\, \subset I$.

Il en résulte que f est continue sur tous ces intervalles donc sur leur réunion : $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } I.}$

• Soit $x > 0$. On a, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} = 0$ donc $\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ étant une série à termes positifs convergente, on en déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

• On montre de la même manière que pour f (convergence normale sur tout intervalle $[a\,;+\infty[\, \subset I$) que : $\boxed{g \text{ continue sur } I.}$

8. • Soit $x \in I$, fixé. On considère la fonction $h \colon u \in I \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}$.

Cette fonction est le produit des deux fonctions positives et décroissantes sur I : $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \mathrm{e}^{-ux}$ donc la fonction h est décroissante sur I, et comme dans la question **1.**, la fonction h est continue et intégrable sur I.

On a alors :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \int_n^{n+1} h(u)\,\mathrm{d}u \leqslant h(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} h(u)\,\mathrm{d}u$$

(l'inégalité de droite est licite pour $n = 1$ puisque h intégrable).
En sommant pour n variant de 1 à $N \in \mathbb{N}^*$ on obtient, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{N} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,,$$

puis par passage à la limite quand $N \to +\infty$: $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.}$

• On effectue alors le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $ux = t$, d'où :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{xt}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{xt}}\,\mathrm{d}t$$

donc par théorème d'encadrement $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = K = \sqrt{\pi}\,.$

On en déduit l'équivalent : $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}\,\cdot}$

9. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

- *1ère solution (classique, mais un peu lourde)*
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}+n+1} \leqslant 0 \end{aligned}$$

  donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
  En utilisant une comparaison série intégrale comme dans la question **8.** on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}$$

  donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geqslant -2.$
  Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et minorée par -2 ; puisqu'elle est décroissante, $\boxed{\text{elle converge.}}$
- *2ème solution : bien plus jolie*
  En reprenant le calcul ci-dessus,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}+n+1} = \frac{\sqrt{n}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n(n+1)}+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\frac{\sqrt{n}}{2n}}{2n} = -\frac{1}{4n^{3/2}}$$

  donc, par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, et il est bien connu que cela équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

10. • Le résultat de la question précédente montre qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \ell$
soit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + o(1)$$

d'où l'on tire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, il résulte alors de la question **7.** que, pour tout $x>0$, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx} \text{ converge.}}$

• Soit $x>0$. On considère les séries de termes généraux $a_k=\dfrac{\mathrm{e}^{-kx}}{\sqrt{k}}$ pour $k\geqslant 1$ et $a_0=0$, et $b_k=\mathrm{e}^{-kx}$ pour $k\geqslant 0$.

Ces séries sont absolument convergentes : cela a déjà été vu en **7.** pour la première, et la seconde est géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x}\in\,]0\,;1[$; leurs sommes sont :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_k=f(x) \quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{+\infty}b_k=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}\cdot$$

On effectue le produit de Cauchy de ces deux séries ; on obtient une série de terme général c_n pour $n\geqslant 0$ où :

$$c_0=0 \quad\text{et, pour } n\geqslant 1,\ c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\sqrt{k}}\mathrm{e}^{-(n-k)x}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx},$$

donc, d'après le théorème du cours sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes : $h(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}c_n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$.

Ainsi, $\boxed{\forall\,x>0,\ h(x)=\dfrac{f(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}\cdot}$

11. • Quand $x\to 0$, on a $1-\mathrm{e}^{-x}\sim x$ donc directement avec le résultat de la question **8.**, on a $\boxed{h(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}\cdot}$

• Notons encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie à la question **9.** par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$.

On a, pour $x>0$:

$$h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx}=\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+2\sqrt{n})\mathrm{e}^{-nx}=2g(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\mathrm{e}^{-nx}$$

(on a bien le droit de couper la somme en deux car les séries écrites convergent).

On a vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente ; elle est donc bornée d'où

$$\forall\,x>0,\ \left|\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\mathrm{e}^{-nx}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|\,\mathrm{e}^{-nx}\leqslant\|u\|_\infty\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\|u\|_\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\|u\|_\infty}{x}\cdot$$

Ainsi,

$$g(x)=\frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{h(x)}_{\sim\frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}}-\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\mathrm{e}^{-nx}}_{=O\left(\frac{1}{x}\right)}\Bigg)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}\cdot$$

C. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

12. • Si A est finie alors $\displaystyle\sum_{n\in A}a_n\mathrm{e}^{-nx}=\sum_{n\in A}\mathrm{e}^{-nx}$ est une somme finie donc $\boxed{\text{si } A \text{ est fini, } I_A=[0\,;+\infty[.}$

• On suppose désormais que A est infini.

On définit φ par récurrence par $\varphi(0)=\min A$ et $\varphi(n+1)=\min\big(A\setminus\{\varphi(k)\mid 0\leqslant k\leqslant n\}\big)$. Cette définition a bien un sens car, A étant infinie, l'ensemble $A\setminus\{\varphi(k)\mid 0\leqslant k\leqslant n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Par construction la suite φ est strictement croissante à valeurs dans A et telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{\varphi(n)}=1$: elle répond donc à la question posée.

• Si $x = 0$, la suite $(a_n e^{-nx})$ ne converge pas vers 0 (considérer la suite extraite $\left(a_{\varphi(n)} e^{-\varphi(n)x}\right)$ constante égale à 1), donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx}$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, on a $|a_n e^{-nx}| \leqslant e^{-nx}$, ce qui donne par comparaison de séries à termes positifs la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx}$

Ainsi, $\boxed{\text{si } A \text{ est infini, } I_A =]0\,;+\infty[= I.}$

13. Soit $x > 0$; on a : $f_A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-kx}$ et $\dfrac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$

Par définition de $A(n)$, on a $\mathrm{Card}(A(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$; le produit de Cauchy des deux séries ci-dessus, absolument convergentes, donne alors directement : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n)) e^{-nx} = \dfrac{f_A(x)}{1-e^{-x}}\,.}$

14. • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$A_1(n) = \left\{k^2 \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k^2 \leqslant n\right\} = \left\{k^2 \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \leqslant \sqrt{n}\right\} = \left\{k^2 \;\middle|\; 1 \leqslant k \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor\right\},$$

et $A_1(n)$ est de cardinal $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Pour $x > 0$ on a donc d'après la question précédente, $\boxed{\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-nx}\,.}$

• Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0\,;1]$ donc

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

d'où $(1-e^{-x})g(x) - 1 \leqslant f_{A_1}(x) \leqslant (1-e^{-x})g(x)$ car $1 - e^{-x} > 0$.

Or d'après 11., $(1-e^{-x})g(x)$ équivaut à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ quand $x \to 0$, donc $\dfrac{2\sqrt{x} f_{A_1}(x)}{\sqrt{\pi}}$ tend vers 1 par théorème d'encadrement.

Ainsi $\boxed{f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$

On en déduit $x f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{x\pi}}{2}$ puis $\lim\limits_{x\to 0} x f_{A_1}(x) = 0$ puis : $\boxed{A_1 \in S \text{ et } \Phi(A_1) = 0}$

15. • Soit $x > 0$. On note (a_n) la suite associée à l'ensemble $A = A_1$, c'est-à-dire $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré parfait} \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$v(n) = \mathrm{Card}\left(\left\{(\alpha,\beta) \in A_1^2 \;\middle|\; \alpha + \beta = n\right\}\right) = \mathrm{Card}\left(\{(k, n-k) \mid k \in A_1 \text{ et } n - k \in A_1\}\right),$$

donc $v(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ car $a_0 = 0$, cette dernière formule restant vraie pour $n = 0$ puisque $v(0) = 0$.

On effectue ensuite le produit de Cauchy de la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k e^{-kx}$ (absolument convergente), de somme $f_{A_1}(x)$, par elle-même et on obtient : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} v(n) e^{-nx} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.}$

• En notant (b_n) la suite associée à l'ensemble A_2, on a pour tout entier n, $b_n \leqslant v(n)$ (car dès que b_n vaut 1 alors $v(n)$ vaut au moins 1). On en déduit directement que pour tout $x > 0$,

$$f_{A_2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Par suite, $xf_{A_2}(x) \leqslant x(f_{A_1}(x))^2$. En utilisant l'équivalent $f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ trouvé à la question **15.** , on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} x(f_{A_1}(x))^2 = \dfrac{\pi}{4}$. En admettant que $A_2 \in S$ et en passant à la limite quand $x \to 0$, on déduit alors de l'inégalité précédente que : $\boxed{\Phi(A_2) \leqslant \dfrac{\pi}{4}\cdot}$

D. Un théorème taubérien

16. Soit $\psi \in E$. Pour tout $x > 0$, $|\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\psi(\mathrm{e}^{-nx})| \leqslant \|\psi\|_\infty \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx})$ est absolument convergente par comparaison entre séries à termes positifs, donc convergente, et $L(\psi)(x)$ existe, c'est-à-dire $\boxed{L(\psi) \text{ est bien définie pour tout } \psi \in E.}$

• Soit $\psi_1, \psi_2 \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x > 0$:

$$L(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\left(\lambda\psi_1(\mathrm{e}^{-nx}) + \psi_2(\mathrm{e}^{-nx})\right)\right) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\psi_2(\mathrm{e}^{-nx})$$

donc $L(\lambda\psi_1+\psi_2)(x) = \lambda L(\psi_1)(x)+L(\psi_2)(x)$ pour tout $x > 0$ c'est-à-dire $L(\lambda\psi_1+\psi_2) = \lambda L(\psi_1)+L(\psi_2)$.
En conclusion, $\boxed{\text{l'application } L \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } \mathcal{A}(I,\mathbb{R}).}$

• On suppose que $\psi_1 \leqslant \psi_2$.
Pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx}) \leqslant \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\psi_2(\mathrm{e}^{-nx})$ car $\alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \geqslant 0$, donc $L(\psi_1)(x) \leqslant L(\psi_2)(x)$ en sommant.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tous } \psi_1, \psi_2 \text{ dans } E,\ \psi_1 \leqslant \psi_2 \text{ entraîne } L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2).}$

17. • On a bien $\underline{E_1 \subset E}$ (par définition de E_1) et $\underline{E_1 \neq \emptyset}$ car l'application nulle $\theta : x \in [0\,;1] \mapsto 0$ vérifie $\theta \in E$ et $L(\theta)(x) = 0$pour tout x donc $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\theta))(x) = 0$.
Soient $\psi_1, \psi_2 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x > 0$, on a $x(L(\lambda\psi_1 + \psi_2))(x) = \lambda x(L(\psi_1))(x) + x(L(\psi_2))(x)$ donc par opérations sur les limites on a $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\lambda\psi_1 + \psi_2))(x) = \lambda \lim\limits_{x\to 0} x(L(\psi_1))(x) + \lim\limits_{x\to 0} x(L(\psi_2))(x)$ existe, ce qui prouve que $\lambda\psi_1 + \psi_2 \in E_1$ donc $\underline{E_1 \text{ est stable par combinaison linéaire}}$.

En conclusion, $\boxed{E_1 \text{ est un sous espace vectoriel de } E.}$

• De plus, d'après le calcul ci-dessus, $\Delta(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda\Delta(\psi_1) + \Delta(\psi_2)$ et $\Delta : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ donc Δ est une forme linéaire sur E_1.

Enfin, pour tout $x > 0$ et toute $\psi \in E$, on a $|x(L(\psi))(x)| \leqslant \|\psi\|_\infty\, x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ donc par passage à la limite en 0, on a $|\Delta(\psi)| \leqslant \ell\|\psi\|_\infty$.
Le théorème du cours sur la caractérisation des applications linéaires continues montre alors que $\boxed{\text{l'application } \Delta \text{ est une forme linéaire continue sur } (E_1, \|\ \|_\infty).}$

18. • Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $e_p \in E$ car e_p est continue donc continue par morceaux sur $[0\,;1]$.

Soit $x > 0$. On a $L(e_p)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-n(p+1)x}$ donc $xL(e_p)(x) = \dfrac{[(p+1)x] \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-n[(p+1)x]}}{p+1}\cdot$ Puisque $\lim\limits_{y\to 0^+} y \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-ny} = \ell$ on en déduit $\boxed{\Delta(e_p) = \dfrac{\ell}{p+1} \text{ et } e_p \in E_1.}$

• On remarque que $\Delta(e_p) = \ell \displaystyle\int_0^1 e_p$, donc par combinaison linéaire , pour toute fonction polynomiale P, on a $P \in E_1$ et $\Delta(P) = \ell \displaystyle\int_0^1 P$.
Soit maintenant $\psi \in E_0$. Le théorème de Stone-Weierstrass nous fournit une suite de fonctions polynomiales (P_k) qui converge uniformément vers ψ sur $[0\,;1]$.

Pour tout $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| &= x\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\left(\psi(\mathrm{e}^{-nx}) - P_k(\mathrm{e}^{-nx})\right)\right| \\ &\leqslant x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\left|\psi(\mathrm{e}^{-nx}) - P_k(\mathrm{e}^{-nx})\right| \\ &\leqslant \|\psi - P_k\|_\infty\, x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-nx} = \|\psi - P_k\|_\infty\, xL(e_0)(x).\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $a \in\,]0\,;1[$ la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge normalement sur $[a\,;1]$ (vérification aisée) donc la fonction $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est continue sur $]0\,;1]$; de plus, elle admet comme limite ℓ en 0 donc $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est prolongeable par continuité sur le segment $[0\,;1]$. En particulier, elle y est bornée, et si on note M un majorant, l'inégalité précédente implique :

$$\forall\, x \in\,]0\,;1[,\ |xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leqslant M\,\|\psi - P_k\|_\infty\,.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\|\psi - P_k\|_\infty M = 0$, on en déduit que la suite de fonction $(x \mapsto xL(P_k)(x))_{k\geqslant 0}$ converge uniformément sur $]0\,;1[$ vers $x \mapsto xL(\psi)(x)$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} xL(P_k)(x) = \Delta(P_k)$, le théorème de la double limite nous donne alors que la suite $\big(\Delta(P_k)\big)$ converge et que

$$\lim_{x\to 0} xL(\psi)(x) = \lim_{k\to+\infty}\Delta(P_k).$$

Cela signifie que $\psi \in E_1$, donc $\boxed{E_0 \subset E_1.}$ De plus :

$$\Delta(\psi) = \lim_{k\to+\infty}\Delta(P_k) = \lim_{k\to+\infty}\ell\int_0^1 P_k = \ell\int_0^1\psi,$$

la dernière égalité découlant de la convergence uniforme de la suite (P_k) vers ψ sur le segment $[0\,;1]$.

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } \psi \in E_0\text{, on a } \Delta(\psi) = \ell\displaystyle\int_0^1\psi.}$

19. • La fonction g_- est continue en tous points de $[0\,;1] \setminus \{a-\varepsilon, a\}$.
De plus $\displaystyle\lim_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_-(x) = \lim_{x\to(a-\varepsilon)^+} g_-(x) = g_-(a-\varepsilon) = 1$; idem pour les limites à droite et à gauche en a. On en déduit que g_- est continue sur $[0\,;1]$; idem pour g_+.
Ainsi : $\boxed{g_- \text{ et } g_+ \in E_0.}$

• On a $\displaystyle\Delta(g_-) = \ell\int_0^1 g_- = \ell\left(\int_0^{a-\varepsilon} g_- + \int_{a-\varepsilon}^a g_- + \int_a^1 g_-\right)$;
Or : $\displaystyle\int_0^{a-\varepsilon} g_- = a-\varepsilon$ et $\displaystyle\int_{a-\varepsilon}^a g_- = \frac{\varepsilon\cdot 1}{2}$ (aire d'un triangle) et $\displaystyle\int_a^1 g_- = 0$, donc $\Delta(g_-) = \ell\left(a - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\cdot$
Calcul similaire pour $\Delta(g_+)$.

$$\boxed{\Delta(g_-) = \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ et } \Delta(g_+) = \ell\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot}$$

• On a $1_{[0,a]} \in E$ et $g_- \leqslant 1_{[0,a]} \leqslant g_+$, donc pour tout $x > 0$, $xL(g_-)(x) \leqslant xL(1_{[0,a]})(x) \leqslant xL(g_+)(x)$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} xL(g_-)(x) = \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$; par définition de la limite, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in\,]0\,;\alpha_1],\ xL(g_-)(x) \geqslant \ell\,(a-\varepsilon)\,.$$

De même, puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} xL(g_+)(x) = \ell\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$,on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in\,]0\,;\alpha_2],\ xL(g_+)(x) \leqslant \ell\,(a+\varepsilon)\,;$$

en prenant alors $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a :

$$\forall x \in\,]0\,;\alpha],\ \left|xL(1_{[0,a]})(x) - \ell a\right| \leqslant \ell\varepsilon\,.$$

On vient ainsi de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} xL(1_{[0,a]})(x) = \ell a$.

En conclusion, $\boxed{1_{[0,a]} \in E_1 \text{ et } \Delta(1_{[0,a]}) = \ell a.}$

• Pour $1_{[0,a[}$, les calculs sont identiques ce qui donne : $1_{[0,a[} \in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a[}) = \ell a$.

On en déduit, pour $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, puisque $1_{[a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a[}$, $1_{[a,b]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[a,b]}) = \ell(b-a) = \ell \displaystyle\int_0^1 1_{[a,b]}$.

On a évidemment des résultats analogues pour $1_{]a,b]}$, $1_{]a,b[}$ et $1_{[a,b[}$.

Par linéarité, on en déduit alors que toute fonction en escalier φ appartient à E_1 et que $\Delta(\varphi) = \ell \displaystyle\int_0^1 \varphi$.

Enfin, on sait que si $\psi \in E$ alors ψ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[0\,;1]$. On montra alors, exactement comme dans la question **18.**, que $\psi \in E_1$ et que $\Delta(\psi) = \ell \displaystyle\int_0^1 \psi$.

Conclusion : $\boxed{E_1 = E \text{ et } \Delta(\psi) = \ell \displaystyle\int_0^1 \psi \text{ pour tout } \psi \in E.}$

20. • Soit $N > 0$. On a :

$$(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-n/N} \psi(\mathrm{e}^{-n/N}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \mathrm{e}^{-n/N} \psi(\mathrm{e}^{-n/N}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \mathrm{e}^{-n/N} \mathrm{e}^{n/N},$$

donc $\boxed{(L(\psi))\left(\dfrac{1}{N}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \alpha_k.}$

• Puisque ψ est continue par morceaux, elle appartient à E_1 d'après ce qui précède et :

$$\lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x) = \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi = \ell \int_{1/\mathrm{e}}^1 \psi = \ell(\ln(1) - \ln(1/\mathrm{e})) = \ell.$$

donc $\boxed{\lim_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \alpha_k = \lim_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N}(L(\psi))\left(\dfrac{1}{N}\right) = \ell = \lim_{x\to 0}\left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\right).}$

21. En reprenant les notations de la partie **C**, on a $\mathrm{Card}\,(A(n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Comme $A \in S$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}\right) = \lim_{x\to 0} x f_A(x) = \Phi(A)$

On peut appliquer donc le résultat précédent à la suite $(\alpha_n) = (a_n)$ avec $\ell = \Phi(A)$ et on obtient que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\mathrm{Card}\,(A(n)) = \Phi(A).}$

Pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et a pour somme $(f_{A_1}(x))^2$; de plus $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,(f_{A_1}(x))^2 = \frac{\pi}{4}$ d'après **14.** et **15.**

On peut donc appliquer les résultats précédents et on en déduit : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v(k) = \frac{\pi}{4}\cdot}$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆