DS n°6 (le 10/02/2018)

SUJET n°1 (1 exercice et 1 problème)

EXERCICE (extrait de E3A PC 2017)

On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,\ q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$.

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\, {}^tV_0$.

1. Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?

2. Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

3. a) Calculer A_0U_0.

b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

PROBLÈME (E3A PC 2017, 3 heures)

Partie I

I. 1) a) Calculer $\quad f(t) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}s \quad$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Montrer que f est développable en série entière, et donner son développement.

I. 2) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que S est développable en série entière, et donner son développement.

b) Justifier l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

I. 3) a) Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'égalité :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

c) Montrer que R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $R(x)$ pour $x > 0$, et justifier que :

$$S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma\,.$$

I. 4) a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit : $\quad g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t\,.$

Pour tout $x \in \,]0\,;1[$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$, et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \frac{x^n}{n}\,\cdot$$

b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0\,;1[$.

c) Montrer que les fonctions g_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) En remarquant, après l'avoir justifié, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$, montrer que :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right).$$

I. 5) Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax) - R(bx)$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t\,.$

I. 6) a) Montrer que, pour tout $x > 0$ on a : $R(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0\,.$

b) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_0^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Partie II

II. 1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$

b) Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et en déduire la valeur de I_n.

II. 2) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant 2$.
À tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on associe $T(P)$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; T(P)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice M dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.

b) Étudier si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

II. 3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ associant à tout polynôme P son polynôme dérivé P'.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer les réels $b_0(x), \dots, b_n(x)$ tels que $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k b_k(x)$.

Indication : on pourra citer et utiliser une formule de Taylor.

b) À tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on associe $T(P)$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; T(P)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait : $T(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k D^k(P)$.

c) Déterminer les éléments propres de T (valeurs propres et vecteurs propres).

II. 4) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y' - y + g = 0$.
Justifier que la solution générale est de la forme $y\colon x \mapsto k\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t,\ k \in \mathbb{R}$.

II. 5) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, et soit $N_\infty(g) = \sup\{|g(t)|\,,\, t \in \mathbb{R}\}$.

a) On définit $T_g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ T_g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier qu'alors $T_g(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g(u)\,\mathrm{d}u$, et que T_g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en précisant $(T_g)'$ en fonction de T_g et de g.

b) En supposant g non nulle, déterminer s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T_g = \lambda g$.

c) Montrer que T_g est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $N_\infty(T_g)$ au moyen de $N_\infty(g)$.

d) On note E l'espace vectoriel des applications continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que l'application $T\colon g \mapsto T_g$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé (E, N_∞).

e) Montrer que si g tend vers 0 en $+\infty$, alors T_g aussi.
Indication : on vérifiera que si $|g(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$, alors $|T_g(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$.

II. 6) a) Pour tout réel A justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t$.

b) Soient $c\colon t \mapsto \cos(t)$ et $s\colon t \mapsto \sin(t)$, et F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par (c, s).
Montrer que $g \mapsto T_g$ (où T_g défini ci-dessus) définit un endomorphisme de F et écrire sa matrice N dans la base (c, s).
N est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Partie II

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $\quad xy'' + y' - (x+1)y = 1$.

III. 1) On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in \,]-r\,;r[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0 ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $K > 0$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \frac{K}{n!}\,.$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r = +\infty$.

III. 2) On souhaite résoudre ici cette équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$\mathcal{S} = \Big\{ y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}) \;\Big|\; \forall\, x > 0,\ xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1 \Big\}.$$

a) Pour tout $y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$, on pose $z(x) = \mathrm{e}^{-x} y(x)$ pour tout $x > 0$.
Montrer que $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall\, x > 0,\ xz''(x) + (2x+1)z'(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad (*)$$

b) Déterminer les $Z \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0,\ xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0.$$

c) Déterminer les $Z \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0,\ xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation $(*)$, en utilisant la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
On utilisera $R(x)$ *et* $R(2x)$.

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in \mathcal{S}$.

III. 3) a) Sachant que $R(x) \underset{x\to 0^+}{=} -\ln(x) + \gamma + o(1)$, déterminer les solutions $y \in \mathcal{S}$ ayant une limite finie en 0.

Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie **I** et reliée à R par : $S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma$ pour $x > 0$ (vu en **I.3)c)**).

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions θ de la question **III.1)** : on exprimera $\theta(x)$ en fonction de $S(x)$ et de $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) En utilisant un produit de Cauchy, donner l'expression de a_n en fonction de n et de a_0.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆