CORRIGÉ DU DS°6

SUJET n°1 (1 exercice + 1 problème)

EXERCICE (extrait de E3A PC 2017)

1. On a : $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(A_0) = 1$ (toutes les colonnes sont proportionnelles à la première).

2. A_0 n'étant pas inversible, 0 est valeur propre de A_0 (cours). On peut aussi utiliser le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} A_0 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(A_0) = 3$, qui montre que 0 est valeur propre d'ordre $\geqslant 3$.

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$; l'équation $A_0 V = 0$ équivaut à $x + y - z + t = 0$; il s'agit de l'équation de l'hyperplan $\operatorname{Ker} A_0$; une base en est formée, par exemple, des vecteurs $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ces trois vecteurs vérifiant l'équation précédente et étant trivialement linéairement indépendants).

3. a) On calcule : $A_0 U_0 = -2U_0$.

b) Ainsi, U_0 est un vecteur propre associée à la valeur propre -2. Puisque $U_0 \notin \operatorname{Ker} A_0$, la droite vectorielle de base U_0 et l'hyperplan $\operatorname{Ker} A_0$ sont supplémentaires, donc $(U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3)$ est une base de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A_0 ; cela montre que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

c) Pour la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(-2,\ 0,\ 0,\ 0)$ et la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ on a $A_0 = PDP^{-1}$ (P est la matrice de passage de la base canonique à la base $(U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3)$).

PROBLÈME (E3A PC 2017, 3 heures)

Partie I.

1. a) Pour $t = 0$: $f(0) = 1$. Pour $t \neq 0$: $f(t) = \left[\frac{\mathrm{e}^{-ts}}{-t}\right]_{s=0}^{s=1} = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

b) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de fonctions continues).
Le développement limité en 0 : $\mathrm{e}^{-t} = 1 - t + o(t)$ entraine que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0 et par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque :

$$\forall\, s \in\,]0\,;1],\ \forall\,(t,u) \in \mathbb{R}^2,\ t < u \Longrightarrow e^{-su} < e^{-st} \Longrightarrow f(u) < f(t)$$

(la dernière inégalité stricte étant justifiée par le fait que l'intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle est strictement positive).
Enfin, $\lim\limits_{t\to -\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{-t} = +\infty$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = 0$.
D'après le théorème de bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$.

c) On connaît le développement en série entière : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!}$.

On en déduit $f(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n!}$ pour $t \neq 0$, cette égalité restant vraie pour $t=0$ puisque $f(0)=1$.
C'est le développement de f en série entière, avec un rayon de convergence infini.

2. a) Puisque le rayon de convergence est infini, on peut intégrer terme à terme ce développement en série entière sur le segment $[0\,;x]$ pour tout x réel et on obtient : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n!)}$ ·

b) Pour $x=1$, on obtient $S(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n!)} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $[x\,;+\infty[$ pour tout $x>0$.

Pour $t \geqslant 1$ on a $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$; or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ (fonction de référence du cours), donc à l'aide des théorèmes de comparaison pour les fonctions positives, on en déduit qu'il en est de même de $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

Finalement, $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $x>0$.

b) • Déjà, il est facile de vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe, puisque :

– la fonction $t \mapsto \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;

– $\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t)$, et $t \mapsto \ln t$ est une fonction de signe constant et intégrable au voisinage de 0 ;

– $\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive intégrable au voisinage de $+\infty$.

• En intégrant par parties :

$$-\int_0^1 \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(t)(\mathrm{e}^{-t}-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = S(1).$$

Cette intégration par parties est légitime puisque $\ln(t)(\mathrm{e}^{-t}-1) \underset{t\to 0^+}{\sim} -t\ln(t)$, donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \ln(t)(\mathrm{e}^{-t}-1) = 0$.

• En intégrant par parties :

$$-\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -R(1).$$

Cette intégration par parties est légitime puisque $\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

• En additionnant les résultats précédents, on trouve $\gamma = S(1) - R(1) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

c) Par la relation de Chasles : $\forall\, x>0,\ R(x) = R(1) - \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$; or $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est la primitive s'annulant en 1 de la fonction continue $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il en résulte que R est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall\, x>0,\ R'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ ·

De $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ on déduit $S'(x) = f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ pour $x \neq 0$.

On a donc : $S'(x) = R'(x) + \dfrac{1}{x}$ pour $x>0$. Les fonctions S et $x \mapsto R(x)+\ln(x)+\gamma$ ont des dérivées égales sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Comme elles prennent la même valeur pour $x=1$ $(S(1) = R(1)+\gamma)$ elles sont égales sur cet intervalle.

4. a) • La série entière de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ a un rayon de convergence égal à 1, puisque le terme général tend vers 0 pour $|x| < 1$ et tend vers l'infini pour $x > 1$. Donc la série converge pour $x \in]-1\,;1[$, et en particulier aussi pour $x \in]0\,;1[$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t} = \dfrac{\mathrm{e}^{t\ln x}}{t}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$ et, pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{x^t}{t} \leqslant \mathrm{e}^{t\ln(x)}$ qui est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ puisque $\ln(x) < 0$.

Cela prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$, et finalement $g(x)$ est bien défini pour $x \in]0\,;1[$.

• Soit $x \in]0\,;1[$.

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto x^t = \mathrm{e}^{t\ln(x)}$ sont décroissantes et positives sur $[1\,;+\infty[$ ($\ln(x) < 0$) donc $t \mapsto \dfrac{x^t}{t}$ l'est aussi.

On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, t \in [k\,;k+1],\ \frac{x^{k+1}}{k+1} \leqslant \frac{x^t}{t} \leqslant \frac{x^k}{k}\,,$$

et en intégrant cette inégalité entre k et $k+1$, on trouve :

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \frac{x^{k+1}}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^k}{k}\cdot$$

En additionnant alors les inégalités de gauche pour k variant de n à $+\infty$, et celles de droite pour k variant de $n+1$ à $+\infty$, ce qui est licite puisque l'intégrale et la série convergent, on obtient :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \leq \int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$0 \leqslant g_n(x) - g(x) = \int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{n}\,\cdot$$

b) On en déduit pour tout $x \in]0\,;1[$: $0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\|g_n - g\|_\infty^{]0;1[} \leqslant \dfrac{1}{n}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_\infty^{]0;1[} = 0$, c'est-à-dire que la suite (g_n) converge uniformément vers g sur $]0\,;1[$.

c) Rappelons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Une fonction polynôme étant continue, pour prouver la continuité de g_n il suffit de prouver celle de la fonction $F : \left\{\begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^n \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{\mathrm{e}^{t\ln x}}{t}\,\mathrm{d}t. \end{array}\right.$

Pour cela, posons $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{t\ln x}}{t}$ pour $x > 0$ et $t \in [1\,;n]$. Alors :

– pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[1\,;n]$, par théorèmes usuels ;

– pour tout $t \in [1\,;n]$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes usuels ;

– soit $a > 0$. Pour tout $x \in]0\,;a]$ et tout $t \in [1\,;n]$, on a $0 \leqslant f(x,t) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{t\ln a}}{t} = \varphi(t)$, et la fonction φ est continue donc intégrable sur le segment $[1\,;n]$. L'hypothèse de domination locale est donc satisfaite.

Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre indique alors que F est continue sur tout intervalle $]0\,;a] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en est donc de même de g_n.

d) • Compte tenu de la convergence uniforme de (g_n) vers g sur $]0\,;1[$, et puisque $1 \in \overline{]0\,;1[}$, le théorème de la double limite permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to1^-} g_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} g_n(1)$$

puisque les g_n sont continues en 1 (question précédente).

- En utilisant le développement en série entière

$$\forall x \in]-1\,;1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\,,$$

on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in]0\,;1[$.
D'autre part,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{t\ln(x)}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = R(-\ln x),$$

le changement de variable effectué étant licite puisque $t \mapsto u = -t\ln x$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[1\,;+\infty[$ sur $[-\ln x\,;+\infty[$.
On en déduit pour $x \in]0\,;1[$:

$$g(x) = -\ln(1-x) - R(-\ln x) = -\ln(1-x) - S(-\ln x) + \ln(-\ln x) + \gamma\,,$$

en utilisant le I.3) c).
Par suite, $g(x) = \ln\left(\frac{-\ln x}{1-x}\right) - S(-\ln x) + \gamma$.
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et que S est continue en 0, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} g(x) = \ln(1) - S(0) + \gamma = \gamma$.

- Compte tenu de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \gamma$, et de $\displaystyle g_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, on obtient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma.$$

5. $\displaystyle R(ax) = \int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au}}{u}\,\mathrm{d}u$ grâce au changement de variable affine (donc licite) $t = au$.
De même $\displaystyle R(bx) = \int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au}}{u}\,\mathrm{d}u$. On obtient donc $\displaystyle R(ax) - R(bx) = \int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au} - \mathrm{e}^{-bu}}{u}\,\mathrm{d}u$.
D'autre part en utilisant le I.3) c) :

$$R(ax) - R(bx) = S(ax) - S(bx) - \ln(ax) + \ln(bx) = S(ax) - S(bx) + \ln b - \ln a.$$

Par continuité de S en 0, on en déduit en faisant tendre x vers 0 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au} - \mathrm{e}^{-bu}}{u}\,\mathrm{d}u = \ln b - \ln a.$$

6. a) Pour $x > 0$ on a :

$$R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}[-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}\,\cdot$$

Par suite $0 \leqslant xR(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

b) Avec le I.3) c) : $R(x) = -\ln x + S(x) - \gamma$ donc $R(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$. On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 0} xR(x) = \lim_{x\to 0} -x\ln x = 0$.
Avec en plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$ obtenu à la question précédente, cela justifie l'intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = \big[xR(x)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xR'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1\,,$$

en utilisant $xR'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ (montré au I.3)c)).

Partie II

1. a) I_n existe puisque $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $t^n\mathrm{e}^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$...

b) On intègre par parties :

$$I_{n+1} = \big[- t^{n+1}\mathrm{e}^{-t} \big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1)t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n\,,$$

l'intégration par parties étant justifiée car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$.
On montre alors facilement par récurrence sur n que $I_n = n!$: en effet, c'est vérifié pour $n = 0$ puisque $I_0 = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, et si l'on suppose $I_n = n!$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on en déduit $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)!$.

2. a) • – Puisque $P(x+t)$ est une combinaison linéaire des t^k on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $T(P)(x)$ est bien défini, comme combinaison linéaire des I_k.
– T est une application linéaire puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda P + Q)(x) = \lambda T(P)(x) + T(Q)(x)$ par linéarité de l'intégrale.
– On calcule, pour $x \in \mathbb{R}$:
– $T(1)(x) = I_0 = 1$ donc $T(1) = 1$;
– $T(X)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(x+t)\,\mathrm{d}t = xI_0 + I_1 = 1 + x$ donc $T(X) = 1 + X$.
– $T(X^2)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(x+t)^2\,\mathrm{d}t = x^2 I_0 + 2xI_1 + I_2 = 2 + 2x + x^2$ donc $T(X^2) = 2 + 2X + X^2$.
Donc pour tout polynôme $P \in R_2[X]$ on a $T(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ par combinaison linéaire.
T est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

• Compte tenu des calculs ci-dessus, sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) M est triangulaire et a donc comme unique valeur propre 1 (d'ordre 3). Si elle était diagonalisable elle serait semblable à la matrice diagonale ayant des 1 sur la diagonale, c'est-à-dire la matrice identité et on aurait alors $M = I_3$, ce qui est faux : M n'est donc pas diagonalisable.

3. a) On applique la formule de Taylor pour les polynômes.
Pour un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a :

$$P(x+t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k$$

donc $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k b_k(x)$, en posant $b_k(x) = \dfrac{P^{(k)}(x)}{k!}$.

b) Le fait que T est bien défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ et est linéaire se démontre comme dans **II.2.a)**.
On a de plus, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, T(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} I_k b_k(x) = \sum_{k=0}^{n} I_k \frac{P^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x)$$

puisque $I_k = k!$.
On obtient donc $T(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$ qui appartient bien à $\mathbb{R}_n[X]$. Et on a aussi montré la formule demandée, avec $a_k = 1$ pour $k \in [\![1\,;n]\!]$.

c) La formule précédente permet de calculer facilement, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$:

$$T(X^k) = X^k + kX^{k-1} + k(k-1)X^{k-2} + \cdots + \frac{k!}{2}X^2 + k!X + k!\,,$$

ce qui permet d'écrire la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n! \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n!/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

M est triangulaire et a donc comme unique valeur propre 1 (d'ordre $n+1$).
De plus, il est clair que la matrice $M - I_n$ est de rang n (ses n dernières colonnes sont indépendantes puisque les coefficients au-dessus de la diagonale sont non nuls), donc d'après le théorème du rang, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$, est de dimension $\dim \mathbb{R}_n[X] - n = 1$.
Et puisque l'on a $T(1) = 1$, il s'agit de l'ensemble des polynômes constants.

4. Puisque la solution de l'équation homogène associée $y' - y = 0$ est $x \mapsto k\mathrm{e}^x$, il suffit de montrer que la fonction $F\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t$ est une solution particulière de l'équation $y' - y = g$.
Déjà, la définition de F a bien un sens puisque la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et, g étant bornée (par M), on a pour tout réel t, $|\mathrm{e}^{-t}g(t)| \leqslant M\mathrm{e}^{-t}$, et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
On a alors, en utilisant la relation de Chasles :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^x \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

ce qui montre que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F'(x) = e^x \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t \right) - e^x \left(e^{-x} g(x) \right).$$

Ainsi, on a bien $F' - F = -g$, et F est bien solution de l'équation différentielle proposée.

La solution générale de cette équation s'obtient alors en lui ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée.

5. a) T_g est bien définie puisque g est continue et bornée donc $|g(x+t)\mathrm{e}^{-t}| \leqslant M\mathrm{e}^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Le changement de variable affine $u = t + x$ (licite) permet alors d'écrire :

$$T_g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u+x} g(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

T_g est donc la fonction que j'ai appelée F dans la question précédente ; les calculs ont déjà été faits : T_g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(T_g)' = T_g - g$.

b) D'après ce qui précède, $T_g = \lambda g$ entraine $\lambda g' = (\lambda - 1)g$.
Si $\lambda = 0$ on obtient $g = 0$, ce qui est exclu par l'énoncé.
Si $\lambda \neq 0$, on obtient $g(x) = k\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$. Comme g doit être bornée sur $\mathbb{R}$, la seule possibilité est $\lambda = 1$ et $g = k$ constante. Réciproquement si $g = k$ constante on obtient bien $T_g(x) = k$ donc $T_g = g$.
Si g est constante non nulle, $\lambda = 1$ convient. Sinon il n'existe pas de λ tel que $T_g = \lambda g$.
*En d'autres termes, la seule valeur propre possible de l'endomorphisme $g \mapsto T_g$ (voir question **d)** ci-après) est 1, et le sous-espace propre associé est le sous-espace vectoriel formé des applications constantes.*

c) Puisque g est bornée on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|g(x)| \leqslant N_\infty(g)$. On en déduit :

$$|T_g(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} N_\infty(g)\,\mathrm{d}t = N_\infty(g).$$

On a donc $N_\infty(T_g) \leqslant N_\infty(g)$.

d) Notons déjà que le fait que l'ensemble des applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que N_∞ est bien une norme sur E sont directement des résultats du cours.

D'après la question précédente, l'application T définie sur E est bien à valeurs dans E.
Si g et h appartiennent à E et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a ; par linéarité de l'intégrale :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ T(\lambda g + h)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} (\lambda g + h)(x+t)\,\mathrm{d}t = \lambda T(g)(x) + T(h)(x),$$

donc $T(\lambda g + h) = \lambda T(g) + T(h)$, et T est bien un endomorphisme de E.
Enfin, l'existence d'une constante k telle que $N_\infty(T_g) \leqslant k.N_\infty(g)$ (ici $k = 1$) prouve que T est continu pour la norme N_∞ (caractérisation des applications linéaires continues, théorème du cours).

e) Supposons que g tend vers 0 en $+\infty$, et soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite :

$$\exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } |g(x)| \leqslant \varepsilon \text{ pour } x \geqslant A.$$

On en déduit pour $x \geqslant A$: $|T_g(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \varepsilon\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \varepsilon$, puisque $|g(x+t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant 0$.
Toujours par définition de la limite, cela prouve que T_g tend vers 0 en $+\infty$.

6. a) L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}$ est continue sur $[A\,;+\infty[$, et elle y est intégrable puisque $|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}| = \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Le calcul ne pose pas de problème :

$$\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}}{\mathrm{i}-1}\right]_A^{+\infty} = \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)A}}{1-\mathrm{i}}$$

puisque $|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}| = \mathrm{e}^{-t}$ tend vers 0 en $+\infty$.

b) L'application $g \mapsto T_g$ est linéaire, cela a été montré à la question **II.5).d)**.
Pour $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ on calcule :

$$\begin{aligned} T_g(x) &= \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{i}} \quad \text{(question précédente)} \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))(1+\mathrm{i}) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{\mathrm{i}}{2}(\cos(x) + \sin(x)). \end{aligned}$$

Par linéarité de T on en déduit :

$$T_c(x) = \mathcal{R}e\,(T_g(x)) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x)) \quad \text{ et } \quad T_s(x) = \mathcal{I}m\,(T_g(x)) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)).$$

On a donc $T_c = \frac{1}{2}(c-s)$ et $T_s = \frac{1}{2}(c+s)$.
L'application $t \mapsto T_g$ est bien un endomorphisme de F et sa matrice dans la base (c,s) est $N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
N n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque son polynôme caractéristique égal à

$$\chi_N(x) = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

n'a pas de racine réelle.

Partie III

1. a) Pour $x \in\,]-r\,;r[$ on peut dériver terme à terme (cours sur les séries entières) et obtenir :

$$\theta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{ et } \quad \theta''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

En reportant dans l'équation différentielle on obtient :

$$\sum_{\substack{\cancel{n=2} \\ n=1}}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

soit :

$$a_1 - a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

En posant $n = n' + 2$ dans la première somme et $n = n' + 1$ dans la deuxième, on obtient :

$$a_1 - a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)^2 a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

puis en regroupant :

$$a_1 - a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}((n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)x^{n+1} = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit :

$$a_1 - a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0.$$

b) • Soit $K = \max(|a_0|, |a_1|)$. Montrons par récurrence double sur n que pour tout n on a $n!|a_n| \leqslant K$.

– C'est évidemment vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$.

– Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$. On en déduit alors :

$$(n+2)!|a_{n+2}| = \frac{(n+1)!}{n+2}|a_{n+1} + a_n| \leqslant \frac{(n+1)!}{n+2}(|a_{n+1}| + |a_n|) \leqslant \frac{1}{n+2}(K + (n+1)K) = K$$

ce qui démontre l'inégalité au rang $n+2$.

On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 0$: $|a_n| \leqslant \dfrac{K}{n!}$.

• Considérons alors une série entière associée à une suite (a_n) vérifiant $a_1 - a_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$: $(n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$.

Puisque pour tout $n \geqslant 0$ on a $|a_n| \leqslant \dfrac{K}{n!}$, son rayon de convergence est supérieur à celui de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$, donc est égal $+\infty$. La somme de cette série entière est donc une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et en « remontant » les calculs, on montre que cette application vérifie l'équation différentielle précédente.

2. a) De $z(x) = \mathrm{e}^{-x}y(x)$ on déduit $z'(x) = -\mathrm{e}^{-x}y(x) + \mathrm{e}^{-x}y'(x)$ et $z''(x) = \mathrm{e}^{-x}y(x) - 2\mathrm{e}^{-x}y'(x) + \mathrm{e}^{-x}y''(x)$. On en déduit

$$\begin{aligned} xz''(x) + (2x+1)z'(x) &= \mathrm{e}^{-x}(xy(x) - 2xy'(x) + xy''(x)) + (2x+1)(-y(x) + y'(x)) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x)). \end{aligned}$$

Par suite y est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si $xz''(x) + (2x+1)z'(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

b) Pour $x > 0$, l'équation s'écrit $Z'(x) = -\dfrac{2x+1}{x}Z(x) = 0$. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\dfrac{2x+1}{x}$ est $2x + \ln x$.

Donc directement d'après le cours : $Z(x) = \lambda \mathrm{e}^{-2x - \ln x} = \dfrac{\lambda}{x}\mathrm{e}^{-2x}$ où λ est une constante réelle.

c) On applique la méthode de variation de la constante, en cherchant $Z(x)$ sous la forme $Z(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x}\mathrm{e}^{-2x}$ où λ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'équation proposée équivaut alors à $\dfrac{\lambda'(x)}{x}\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ d'où $\lambda'(x) = \mathrm{e}^{x}$ puis $\lambda(x) = \mathrm{e}^x + \mu$ avec μ constante réelle.

Les solutions de l'équation proposées sont donc les applications $Z(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mu}{x}\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{1}{x}(\mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{-2x})$.

d) Il suffit d'intégrer Z pour obtenir

$$z(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \mu \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t + C.$$

En introduisant

$$R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$R(2x) = \int_{2x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

on obtient $z(x) = -R(x) - \mu R(2x) + \nu$ où μ et ν sont des réels quelconques.

e) La solution générale $y \in \mathcal{S}$ s'en déduit :

$$y(x) = \mathrm{e}^x z(x) = -\mathrm{e}^x R(x) - \mu \mathrm{e}^x R(2x) + \nu \mathrm{e}^x \qquad \text{avec } (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. a) *Remarque : la relation* $R(x) = -\ln(x) - \gamma + o(1)$ *fournie par l'énoncé provient de la relation* $S(x) = R(x) + \ln x + \gamma$ *vue à la question* ***I.3)c)*** *et du fait que* $\lim_{x\to 0} S(x) = S(0) = 0$.

En reportant $R(x) = -\ln(x) - \gamma + o(1)$ et de même pour $R(2x)$ dans le résultat précédent on obtient :

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x(\ln x + \gamma + \mu(\ln(2x) + \gamma) + \nu + o(1)) \\ &= e^x(\ln x(1+\mu) + \gamma + \mu(\ln 2 + \gamma) + \nu + o(1)) \end{aligned}$$

Cette expression n'a une limite finie en 0 que pour $\mu = -1$ puisque $\ln x$ tend vers $-\infty$.
On a alors, compte tenu de $R(x) = S(x) - \ln(x) - \gamma$:

$$\forall x > 0,\ y(x) = e^x(R(2x) - R(x) + \nu) = e^x(S(2x) - S(x) + C),$$

en ayant posé $C = -\ln 2 + \nu$.

b) En posant comme au **III.2)a)** : $z(x) = e^{-x}y(x) = S(2x) - S(x) + C$, on calcule pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} z'(x) &= 2S'(2x) - S'(x) = 2\frac{1-e^{-2x}}{2x} - \frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \\ z''(x) &= -\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2} + \frac{-e^{-x}+2e^{-2x}}{x}. \end{aligned}$$

D'où :

$$xz''(x) + (2x+1)z'(x) = -\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} + -e^{-x} + 2e^{-2x} + 2(e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = e^{-x}.$$

Cela reste pour $x = 0$, donc z vérifie l'équation $(*)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et par suite $y(x) = e^x(S(2x) - S(x) + C)$ vérifie l'équation $xy'' + y' - (x+1)y = 1$.

Comme S est développable en série entière avec un rayon de convergence infini, on déduit du cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières que y est développable en série entière avec un rayon de convergence infini.

Au **III.1)**, on a trouvé que l'équation $xy'' + y' - (x+1)y = 1$ possède une unique solution possédant un développement en série entière si on impose la condition initiale $y(0) = a_0$. On peut donc écrire $\theta(x) = e^x(S(2x) - S(x) + a_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculons une expression de a_n.
Des relations :

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad S(2x) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2^n-1)x^n}{n(n!)} \quad , \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

et

$$\theta(x) = e^x(S(2x) - S(x) + a_0)$$

on déduit, par application de la formule du cours sur le produit de Cauchy :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(2^k-1)}{k(k!)} \frac{1}{(n-k)!} + \frac{a_0}{n!}$$

d'où

$$n!a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(2^k-1)}{k} + a_0.$$

Cette expression peut se simplifier, en écrivant $\dfrac{(-1)^{k-1}(2^k-1)}{k} = \displaystyle\int_1^2 (-t)^{k-1}\,dt$:

$$\begin{aligned} n!a_n - a_0 &= \sum_{k=1}^{n} \int_1^2 (-t)^{k-1}\binom{n}{k}\,dt = \int_1^2 \frac{1}{(-t)}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k - 1\right)dt \\ &= \int_1^2 \frac{(1-t)^n - 1}{-t}\,dt = \int_1^2 \frac{(1-t)^n - 1}{(1-t)-1}\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_1^2 (1-t)^{k-1}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{(1-t)^k}{k}\right]_1^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + a_0\right).$$