

DM N°9 (pour le 17/02/2023)

EXERCICE 1

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières positives ou nulles vérifiant, pour tout couple d'entiers naturels (i, j) :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } 0 \leq i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z .
5. Soit n un entier naturel. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = j | Z = n)$.
6. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?
7. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille française est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2,1$. On admet que la probabilité d'avoir un garçon est $\alpha = 0,51$, et que les naissances sont indépendantes.
Trouver la probabilité que cette famille ait i enfants dont j garçons.

EXERCICE 2

Séries de Pile ou Face

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0; 1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

Pour décrire la succession de n lancers, on introduit la notion de série de lancers amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi, la première série est de longueur $m \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)$ -ième l'aurait amené l'autre côté, et de longueur n si les n lancers ont amené le même côté de la pièce.

Si la longueur de la première série est égale à $m < n$, la deuxième série commence au $(m+1)$ -ième lancer et se termine au lancer précédant un changement de côté s'il y a au moins un deuxième changement de côté au cours des n lancers, sinon on dit qu'elle est de longueur $n - m$.

On peut définir de même les séries suivantes.

Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou face au bout de n lancers.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'évènement :

« le i -ième lancer amène pile »

et F_i l'évènement contraire.

Les deux parties **A** et **B** sont indépendantes.

A. Étude des longueurs des séries

On considère dans cette partie que $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

A.1) On note L_1 la longueur de la première série.

- a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$ (ensemble des valeurs prises par L_1).

b) On suppose que $m < n$.

Exprimer l'évènement $(L_1 = m)$ à l'aide des évènements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+1$.

En déduire la probabilité de l'évènement $(L_1 = m)$.

c) On suppose maintenant que $m = n$.

Exprimer l'évènement $(L_1 = n)$ à l'aide des évènements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n .

En déduire la probabilité de l'évènement $(L_1 = n)$.

d) Vérifier que : $\sum_{m=1}^n P(L_1 = m) = 1$.

A.2) On note L_2 la longueur de la deuxième série, si il y en a une, et on pose $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série.

a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.

b) On suppose que $m + k < n$.

Exprimer l'évènement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des évènements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+k+1$.

En déduire la probabilité de l'évènement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

c) On suppose que $m + k = n$.

Exprimer l'évènement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des évènements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n .

En déduire la probabilité de l'évènement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

d) En déduire la valeur de $P(L_2 = k)$ pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

e) Calculer la probabilité de l'évènement $(L_2 = 0)$.

f) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n-1} P(L_2 = k) = 1$.

B. Étude du nombre de séries lors de n lancers

On considère dans cette partie que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = 1/2$.

On suppose que l'on effectue $n \geq 3$ lancers indépendants et on note N_k le nombre de séries lors des k premiers lancers ($k \leq n$).

Par exemple, si on prend $n = 11$ et si les lancers successifs donnent **FFPPPPFFPPP** (F désignant face et P pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_{11}$: $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$, $N_3(\omega) = \dots = N_6(\omega) = 2$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$ et $N_9(\omega) = \dots = N_{11}(\omega) = 4$.

On admettra que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, N_k est une variable aléatoire sur Ω_n .

B.1) Déterminer les lois de N_1 , N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

B.2) Déterminer $N_n(\Omega_n)$ puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

B.3) Fonctions génératrices de N_n

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0; 1]$, $G_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N = k)s^k$.

a) Pour $s \in [0; 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

b) Que représente $G'_n(1)$?

c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a :

$$P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

On admet qu'on obtient de même :

$$P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}).$$

Montrer alors que : $P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1)$.

- d) Soit $n \geq 2$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$.
 Calculer $G_1(s)$ et en déduire $G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$.
- e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n lancers.

EXERCICE 3

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.

Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q1. Que représente la variable aléatoire S_n ?

Q2. Calculer p_0 , p_1 et p_2 .

Q3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n .

Q6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q7. Montrer que $R_p \geq 1$.

Q8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

Q9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1; 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q10. Calculer q_1 et q_2 .

Q11. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Q12. (★★) Si k et n sont des entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$, montrer que :

$$P((S_n = 0) \cap (T = k)) = P(T = k)P(S_{n-k} = 0).$$

En déduire que¹ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k.$$

Q13. En utilisant un produit de Cauchy et la relation ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

Q14. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1; 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

Q15. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q16. En utilisant les questions **Q11.** et **Q14.**, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

Q17. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

1. Ce résultat est admis dans l'énoncé original.