CORRIGÉ ENAC 2013

PARTIE I

1. Pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}^2$, on a (en utilisant la propriété $A^n=0$ pour $n\geqslant 3$) :

$$E(s)E(t)=\left(I+sA+s^2\frac{A^2}{2}\right)\left(I+tA+t^2\frac{A^2}{2}\right)=I+(s+t)A+\left(st+\frac{s^2}{2}+\frac{t^2}{2}\right)A^2=I+(s+t)A+\frac{(s+t)^2}{2}A^2$$

donc $E(s)E(t)=E(s+t)$.

On en déduit alors facilement par récurrence sur n : $E(t)^n=E(nt)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Q1 : Réponses B,C

---

2. D'après le calcul précédent on a , pour tout réel t : $E(t)E(-t)=E(0)=I$, ce qui prouve que $E(t)$ est inversible et a pour inverse $E(-t)$.

Les réponses A, B et C sont donc inexactes. La réponse D est farfelue !

Q2 : Réponse E : aucune réponse exacte.

---

3. **A. B. C.** Soit $t\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in R$. $E(\lambda t)-\lambda E(t)=(\lambda^2-\lambda)t^2\dfrac{A^2}{2}$, on ne peut donc pas avoir $E(\lambda t)=\lambda E(t)$ pour tous λ,t réels : l'application E n'est pas linéaire. Les réponses A et C sont donc fausses.

La réponse B est également inexacte car, même si E est injective (voir ci-dessous), le fait que le noyau soit réduit à $\{0\}$ ne prouve rien pour une application non-linéaire (d'ailleurs la notion de noyau n'a alors guère de sens).

D.
- Démontrons que la famille $\{I,A,A^2\}$ est libre : si α,β,γ sont trois réels tels que $\alpha I+\beta A+\gamma A^2=0$ alors, en multipliant cette égalité par A^2, compte tenu de $A^3=A^4=0$, on obtient $\alpha A^2=0$ d'où $\alpha=0$ puisque $A^2\neq 0$ par l'énoncé.
  On obtient ensuite de la même façon $\beta=\gamma=0$, ce qui démontre le résultat annoncé.
- On peut donc « identifier les coefficients » :

$$E(s)=E(t)\Longrightarrow I+sA+s^2\frac{A^2}{2}=I+tA+t^2\frac{A^2}{2}\Longrightarrow s=t$$

c'est-à-dire que E est injective.

Q3 : Réponse D

---

4. Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ le vecteur colonne formé de ses coordonnées dans la base canonique. On a :

$$u\in F\Longleftrightarrow(f-2\mathrm{Id})(u)=u\Longleftrightarrow(A-2I)X=0\Longleftrightarrow\begin{cases}2x-6y=0\\x-3y=0\end{cases}\Longleftrightarrow x-3y=0$$

et

$$u\in G\Longleftrightarrow(f-\mathrm{Id})(u)=u\Longleftrightarrow(A-I)X=0\Longleftrightarrow\begin{cases}3x-6y=0\\x-2y=0\end{cases}\Longleftrightarrow x-2y=0$$

La réponse C est donc exacte (même si, pour une droite vectorielle, on parle de *vecteur de base* et non de *vecteur directeur* !).

La réponse D est également correcte puisque deux droites vectorielles distinctes d'un plan sont supplémentaires.

Q4 : Réponses C,D

---

5. A. B. Puisque $u=(3,1)$ et $v=(2,1)$, la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v) est $Q=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$: il s'agit, compte tenu de la définition de l'énoncé (non habituelle, mais c'est un PIÈGE classique dans les QCM de l'ENAC !) , de la matrice P^{-1}.

Le calcul de l'inverse donne alors $P=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$.

Enfin, puisque $f(u)=2u$ et $f(v)=v$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base (u,v) est $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$. Les formules de changement de base vues en cours s'écrivent $D=Q^{-1}AQ$ soit $D=PAP^{-1}$.

La réponse A est donc exacte.

C. D. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $D^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&1\end{pmatrix}$ puis $A^n=P^{-1}D^nP$ (toujours avec les notations de l'énoncé).

On obtient :

$$A^n=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2^n&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.2^n-2&-6.2^n+6\\2^n-1&-2.2^n+3\end{pmatrix}$$

ce qui est la réponse C.

Q5 : Réponses A,C

---

6. A. B. Un petit rappel de cours : si g est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (hypothèses simplifiées...) on a, pour tous $a,b\in I$:

$$\left|g(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}g^{(k)}(a)\right|\leqslant\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left\|g^{(n+1)}\right\|_\infty^{[a,b]}$$

où $\left\|g^{(n+1)}\right\|_\infty^{[a,b]}$ désigne $\sup\left\{\left|g^{(n+1)}(t)\right|\ ,\ t\in[a,b]\right\}$. C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Appliquée ici à l'ordre n à g entre 0 et t, on obtient

$$\left|g(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}g^{(k)}(0)\right|\leqslant\frac{|t|^n}{n!}\sup_{\substack{x\in[0,t]\\ \text{ou } x\in[t,0]}}\left|g^{(n)}(x)\right|$$

ce qui n'est pas tout à fait la réponse A où il manque une valeur absolue (PIÈGE ou erreur d'énoncé ? on ne le saura jamais...)

C. Il est vrai que, pour tout t réel, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{t^n}{n!}=0$ (croissances comparées), d'où l'on déduit

$e^t=g(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{t^k}{k!}g^{(k)}(0)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{t^k}{k!}$ puisque $g^{(k)}(x)=e^x$ pour tout k.

Mais la formule de la réponse C est fausse ($k-1$ au lieu de $k+1$).

D. Là encore, il manque ici les valeurs absolues. Puisque l'on peut écrire, dans tous les cas, $\sup\limits_{\substack{x\in[0,t]\\ \text{ou } x\in[t,0]}} e^x=e^{|t|}$,

l'inégalité exacte est :

$$\left|g(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|t|}$$

ce qui est assez loin de la formule de l'énoncé (d'ailleurs complètement fantaisiste : que vient faire ce k, qui est un indice, dans le second membre ? rien que cela permettait de répondre d'emblée que la réponse est fausse !).

Bref :

Q6 : Réponse E : aucune réponse exacte.

---

7. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{E}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 3.2^k - 2 & -6.2^k + 6 \\ 2^k - 1 & -2.2^k + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$a_n(t) = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \quad , \quad b_n(t) = -6\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \quad \text{et} \quad d_n(t) = -2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

On a obtenu, à la question précédente, $g(t) = \mathrm{e}^t = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ donc :

$$a(t) = \lim_{n \to +\infty} a_n(t) = 3g(2t) - 2g(t)\ ,\ b(t) = \lim_{n \to +\infty} b_n(t) = -6g(2t) + 6g(t)\ ,\ c(t) = \lim_{n \to +\infty} c_n(t) = g(2t) - g(t)$$

et $d(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} d_n(t) = -2g(2t) + 3g(t)$.

Il s'agit de la réponse A.

On a alors : $\mathrm{E}(t) = \begin{pmatrix} 3g(2t) - 2g(t) & -6g(2t) + 6g(t) \\ g(2t) - g(t) & -2g(2t) + 3g(t) \end{pmatrix} = g(2t)\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + g(t)\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui est la réponse D.

Q7 : Réponses A,D

---

8. Quelques calculs donnent : $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$, $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}$, $\mathrm{QR} = \mathrm{RQ} = 0$ et $\mathrm{Q} + \mathrm{R} = \mathrm{I}$.

q et r sont donc des projecteurs associés. La relation $q \circ r = 0$ implique que l'image de r est incluse dans le noyau de q (il y a en fait égalité). Enfin, $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, r$ est la droite d'équation $x - 2y = 0$, c'est-à-dire G, $\mathrm{Ker}\, r = \mathrm{Im}\, q$ est la droite d'équation $x - 3y = 0$, c'est-à-dire F. q est donc la projection sur F parallèlement à G, r est la projection sur G parallèlement à F.

Finalement :

Q8 : Réponses B,C

PARTIE II

9. Pour $t > 0$ on a $f_a(t) = t^a = \mathrm{e}^{a \ln t}$.

$f_0(t) = 1$ donc f_0 se prolonge par continuité en 0 en posant encore $\tilde{f}_0(0) = 1$.

Puisque $\lim\limits_{t \to 0^+} a \ln t = -\infty$ si $a > 0$, on aura alors $\lim\limits_{t \to 0^+} f_a(t) = 0$, donc f_a est encore prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}_a(0) = 0$.

Conclusion :

Q9 : Réponse D

---

10. Les théorèmes usuels assurent que f_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et cela pour tout réel $a \geqslant 0$.

Pour $a > 0$, sa dérivée est bien sûr : $f_a'(t) = a\, t^{a-1}$, donc la réponse C est exacte (inutile de se limiter à $a \geqslant 1$ pour cette question !).

Q10 : Réponse C

---

11. On a déjà dit que f_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc de classe $\mathscr{C}^1$, pour tout réel a.
Pour $a>0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f_a'(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} a\,t^{a-1}$ existe et est finie si et seulement si $a \geqslant 1$. Le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (appelé aussi th. de prolongement de la dérivée) assure que f_a sera alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
La seule réponse exacte est donc la réponse D (en effet, pour la réponse C on a $\lim\limits_{t\to 0^+} f_a'(t)=0$ seulement si a est *strictement* supérieur à 1).

Q11 : Réponse D

---

12. Si l'on applique le résultat de la question 9, on obtient que $h_{a,b}$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1 pour tous réels a et b positifs ou nuls. Les réponses A et B sont donc fausses.

On obtient également, à l'aide de la question 11, que la fonction $h_{a,b}$ *ainsi prolongée* sera de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ pour $a,b \geqslant 1$. Cela ressemble furieusement à la réponse D, MAIS il y a un PIÈGE !! En effet, la fonction $h_{a,b}$ de l'énoncé n'est définie que sur $]0,1[$ et ne peut donc avoir des propriétés valables sur l'intervalle fermé $[0,1]$!! Donc :

Q12 : Réponse E : aucune réponse exacte.

---

13. La réponse B est exacte d'après ce qui précède. Le changement de variable $t\mapsto 1-t$ dans l'intégrale donne facilement $\mathrm{I}(a,b)=\mathrm{I}(b,a)$.

Q13 : Réponses B,D

---

14. Puisque a et b sont positifs ou nuls, les fonctions $t\mapsto t^{a+1}$ et $t\mapsto (1-t)^{b+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et l'on peut faire l'intégration par parties ;

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a+1,b) &= \int_0^1 \underbrace{t^{a+1}}_{=u(t)}\underbrace{(1-t)^b}_{=v'(t)}\,\mathrm{d}t = \left[t^{a+1}\frac{-(1-t)^{b+1}}{b+1}\right]_0^1 + \frac{a+1}{b+1}\int_0^1 t^a(1-t)^{b+1}\,\mathrm{d}t\\ &= 0+\frac{a+1}{b+1}\mathrm{I}(a,b+1)\end{aligned}$$

donc :

Q14 : Réponse A

---

15. **A. B.** Pour tout $a\geqslant 0$, $\mathrm{I}(a,0)=\displaystyle\int_0^1 t^a\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+1}$: réponse B.

C. D. En itérant la formule trouvée à la question précédente on a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,n) &= \frac{n}{a+1}\mathrm{I}(a+1,n-1) = \frac{n}{a+1}\cdot\frac{n-1}{a+2}\mathrm{I}(a+2,n-2)=\cdots=\frac{n}{a+1}\cdot\frac{n-1}{a+2}\cdots\frac{1}{a+n}\mathrm{I}(a+n,0)\\ &= \frac{n}{a+1}\cdot\frac{n-1}{a+2}\cdots\frac{1}{a+n}\cdot\frac{1}{a+n+1} = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}\end{aligned}$$

donc aucune des réponses C et D n'est juste.

Q15 : Réponse B

---

16. Pour p et q entiers, l'égalité précédente donne :

$$\mathrm{I}(p,q)=\frac{q!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q+1)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

donc :

$\boxed{\textbf{Q16 : Réponse A}}$

---

17. Le changement de variable $t = \sin^2\theta$, $dt = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ donne

$$J(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^p(\cos^2\theta)^q \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt = \frac{1}{2}I(p,q)$$

d'où l'on tire : $J(p,q) = \dfrac{p!q!}{2(p+q+1)!}$.

$\boxed{\textbf{Q17 : Réponse C}}$

---

18. Pas de difficulté ici, on écrit $1 - \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{x-\alpha}{x} > 0$ et $x \neq 0$ d'où

$\boxed{\textbf{Q18 : Réponse C}}$

---

19. **A. B.** Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction ln sur l'intervalle $[x-\alpha, x]$ implique qu'il existe $y \in]x-\alpha, x[$ tel que $\ln x - \ln(x-\alpha) = \dfrac{x-(x-\alpha)}{y}$. On obtient donc la réponse B.

C. D. Puisque $y \in [x-\alpha, x]$ l'inégalité précédente implique donc : $\dfrac{\alpha}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha}{x-\alpha}$, et puisque $\ln x - \ln(x-\alpha) = -g_\alpha(x)/x$, on obtient les inégalités de la réponse D.

$\boxed{\textbf{Q19 : Réponses B,D}}$

---

20. g_α est évidemment dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ et, pour tout $x > \alpha$ on a $g_\alpha(x) = x(\ln(x-\alpha) - \ln x)$ d'où

$$g'_\alpha(x) = (\ln(x-\alpha) - \ln x) + x\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x}\right) = (\ln(x-\alpha) - \ln x) + \frac{\alpha}{x-\alpha} = \frac{1}{x}g_\alpha(x) + \frac{\alpha}{x-\alpha}$$

d'où $g'_\alpha(x) \geqslant 0$ d'après l'inégalité obtenue à la question précédente.
En conclusion :

$\boxed{\textbf{Q20 : Réponse C}}$

---

21. Quand $x \to +\infty$, $\ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{x}\right) \sim -\dfrac{\alpha}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g_\alpha(x) = -\alpha$.

$\lim\limits_{x \to \alpha^+} g_\alpha(x) = \lim\limits_{x \to \alpha^+} x \ln \underbrace{\left(1 - \dfrac{\alpha}{x}\right)}_{\to 0^+} = -\infty$.

Le tableau de variations de g_α est simple :

x	α	$+\infty$
g_α	$-\infty$ $\nearrow$	$-\alpha$

Conclusion :

$\boxed{\textbf{Q21 : Réponses A,D}}$

---

22. Pour tout entier $n > \alpha$, $1 - \dfrac{\alpha}{n}$ est strictement positif donc on peut écrire :

$$y_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\right) = \exp\big(g_\alpha(n)\big).$$

La réponse A est donc inexacte, et la réponse B est correcte (justification claire donnée par l'énoncé !).
Enfin, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} g_\alpha(n) = -\alpha$, on aura bien $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \mathrm{e}^{-\alpha}$ par continuité de la fonction $\exp$.

Q22 : Réponses B,D

---

23. **A.** Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction qui à $u > 0$ associe $u^x = \mathrm{e}^{x \ln u}$ se prolonge par continuité en 0 comme cela a été vu dans la question 9. La réponse A est donc correcte

B.C. D. Le changement de variable $t = \dfrac{u}{n}$ donne :

$$\mathrm{F}_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \,\mathrm{d}u = \int_0^1 (1-t)^n (nt)^x (n\,\mathrm{d}t) = n^{x+1} \int_0^1 (1-t)^n t^x \,\mathrm{d}t = n^{x+1} \mathrm{I}(x,n).$$

Q23 : Réponses A,C

---

24. Pour $u \in \,]0,n[$ on a $\ln\left[\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n\right] = n \ln\left(1 - \dfrac{u}{n}\right) = g_u(n)$ et puisque g_u est croissante sur l'intervalle $]u,+\infty[$ on a $g_u(n) \leqslant g_u(n+1)$ ce qui donne l'inégalité de la réponse B.

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit $\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1}$ puis en multipliant cette inégalité par $u^x \geqslant 0$ et en intégrant de 0 à n, on obtient $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \,\mathrm{d}u$, ce qui n'est ni la réponse C ni la réponse D.

Q24 : Réponse B

---

25. On a, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{n+1}(x) - \mathrm{F}_n(x) &= \int_0^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \,\mathrm{d}u - \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \,\mathrm{d}u \\
&= \underbrace{\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \,\mathrm{d}u - \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \,\mathrm{d}u}_{\geqslant 0 \text{ d'après le calcul fait à la question précédente}} + \underbrace{\int_n^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \,\mathrm{d}u}_{\geqslant 0 \text{ car intégrale d'une fonction positive}}
\end{aligned}$$

et ainsi la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Q25 : Réponse B

---

26. D'après l'étude des variations faite à la question 21, on a pour $u \in \,]0,n[$, $g_u(n) \leqslant -u$. C'est la réponse A.
Donc : $n \ln\left(1 - \dfrac{u}{n}\right) \leqslant -u$ puis par croissance de la fonction exponentielle : $\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u}$. On en déduit :

$$\mathrm{F}_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-u} u^x \,\mathrm{d}u$$

ce qui est la réponse D.

Q26 : Réponses A,D

---

27. A. B. On sait que $\lim\limits_{u\to+\infty} u^{x+2}\mathrm{e}^{-u}=0$ donc par définition de la limite il existe un réel U tel que pour $u\geqslant \mathrm{U}$ on ait $u^{x+2}\mathrm{e}^{-u}\leqslant 1$, soit $\mathrm{e}^{-u}\leqslant \dfrac{1}{u^{x+2}}$. C'est la réponse B.

C. D. On a vu à la question précédente que $\mathrm{F}_n(x)\leqslant \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u$. Deux cas se présentent :

– si $n\leqslant \mathrm{U}$ alors facilement :

$$\mathrm{F}_n(x)\leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u\leqslant \int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u\leqslant \int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u+\frac{1}{\mathrm{U}}$$

ce qui donne la réponse C avec $\mathrm{W}=\mathrm{U}$.

– si $n>\mathrm{U}$ alors, en utilisant les résultats de la réponse B :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_n(x)&\leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u=\int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u+\int_{\mathrm{U}}^n \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u\\&\leqslant \int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u+\int_{\mathrm{U}}^n \frac{1}{u^{x+2}}u^x\,\mathrm{d}u=\int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u+\int_{\mathrm{U}}^n \frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\&\leqslant \int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u+\frac{1}{\mathrm{U}}-\frac{1}{n}\leqslant \int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u+\frac{1}{\mathrm{U}}\end{aligned}$$

ce qui est encore la réponse C avec $\mathrm{W}=\mathrm{U}$.

La réponse C est donc correcte dans les deux cas.
Conclusion :

Q27 : Réponses B,C

---

28. Puisque le réel $\displaystyle\int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u+\frac{1}{\mathrm{U}}$ ne dépend pas de n, on en déduit que la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Étant croissante (question 25), elle converge.

Q28 : Réponse A

Les élèves de Spé peuvent arriver bien plus vite à ce résultat en utilisant le théorème de convergence dominée. Ce même théorème permet d'ailleurs de démontrer que la limite de la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est égale à $\Gamma(x+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}u^x\,\mathrm{d}u$, ce qui donne presque sans calculs les résultats de la question suivante...

29. A. On vient de voir que la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, donc cette réponse est fausse.

B. C. Pour $x\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on a, d'après la question 23 : $\mathrm{F}_n(x+1)=n^{x+2}\mathrm{I}(x+1,n)$ et $\mathrm{F}_n(x)=n^{x+1}\mathrm{I}(x,n)$.
Mais d'après le calcul fait à la question 15 : $\mathrm{I}(x+1,n)=\dfrac{n!}{(x+2)\cdots(x+n+2)}$ et $\mathrm{I}(x,n)=\dfrac{n!}{(x+1)\cdots(x+n+1)}$
donc $\mathrm{I}(x+1,n)=\dfrac{x+1}{x+n+2}\mathrm{I}(x,n)$ d'où : $\mathrm{F}_n(x)=n\dfrac{x+1}{x+n+2}\mathrm{F}_n(x)$, ce qui est la réponse B.
Par passage à la limite dans cette égalité quand $n\to+\infty$, on en déduit $\mathrm{F}(x+1)=(x+1)\mathrm{F}(x)$, donc la réponse C est inexacte.

D. D'après la question 23 : $\mathrm{F}_n(0)=n\mathrm{I}(0,n)$ et d'après la question 16 $\mathrm{I}(0,n)=\dfrac{n!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n+1}$, donc $\mathrm{F}_n(0)=\dfrac{n}{n+1}$. Par passage à la limite quand $n\to+\infty$, on en déduit $\mathrm{F}(0)=1$.
La relation précédente $\mathrm{F}(x+1)=(x+1)\mathrm{F}(x)$ permet alors d'en déduire facilement par récurrence que $\mathrm{F}(k)=k!$ pour tout entier k.

Conclusion :

Q29 : Réponses B,D

PARTIE III

30. Il s'agit ici d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque le coefficient de y' ne s'annule pas sur I, l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Cette droite vectorielle est engendrée par la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\int \dfrac{2-x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x\right)$.

Or : $\dfrac{2-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1+(1-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$ donc

$$\int \frac{2-x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-x} - \ln|1-x| = \frac{1}{1-x} - \ln(1-x) \quad \text{(car ici } x<1\text{)}$$

puis $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$. Conclusion :

Q30 : Réponses B,C

---

31. Un calcul passionnant :
$\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\mathrm{o}(x^3)$ donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} &= \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{x+x^2+x^3+\mathrm{o}(x^3)} = \mathrm{e}\left(1+(x+x^2+x^3)+\frac{1}{2}(x+x^2+x^3)^2+\frac{1}{6}(x+x^2+x^3)^3+\mathrm{o}(x^3)\right)\\
&= \mathrm{e}\left(1+x+x^2+x^3+\frac{1}{2}(x^2+2x^3)+\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right) = \mathrm{e}\left(1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}\big(1+x+x^2+x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)\left(1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)\\
&= \mathrm{e}\left(1+x+x^2+x^3+x+x^2+x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+\frac{13}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right) = \mathrm{e}\left(1+2x+\frac{7}{2}x^2+\frac{34}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right).
\end{aligned}$$

Les réponses A et B sont inexactes.

On recommence :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x}} &= \mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-x-x^2-x^3+\mathrm{o}(x^3)} = \mathrm{e}\left(1-(x+x^2+x^3)+\frac{1}{2}(x+x^2+x^3)^2-\frac{1}{6}(x+x^2+x^3)^3+\mathrm{o}(x^3)\right)\\
&= \mathrm{e}^{-1}\left(1-x-x^2-x^3+\frac{1}{2}(x^2+2x^3)-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right) = \mathrm{e}\left(1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
g(x) &= \mathrm{e}^{-1}\big(1+x+x^2+x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)\left(1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)\\
&= \mathrm{e}^{-1}\left(1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right) = \mathrm{e}^{-1}\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right).
\end{aligned}$$

Les réponses C et D sont inexactes.

Rem : calculs vérifiés avec MAPLE®.

Q31 : Réponse E : aucune réponse exacte.

---

32. Notons déjà que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, les calculs qui suivent sont donc légitimes.

Démontrons l'existence du polynôme de l'énoncé, par récurrence sur n.

– A l'ordre $n=0$ on a bien $f(x)=\mathrm{P}_0\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$, avec $\mathrm{P}_0=\mathrm{X}$.

– Supposons acquise l'existence du polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x)=\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$. Alors en dérivant cette relation :

$$f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{P}'_n\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{(1-x)^2}\left(\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{1-x}\right)+\mathrm{P}'_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$$

donc en posant $\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^2(\mathrm{P}_n(\mathrm{X})+\mathrm{P}'_n(\mathrm{X}))$, qui est un polynôme, on aura bien $f^{(n+1)}(x)=\mathrm{P}_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$.

On vient ainsi de montrer que la réponse D est exacte. Ensuite il suffit de se servir de cette relation de récurrence pour calculer :

$$\mathrm{P}_0=\mathrm{X}\,,\ \mathrm{P}_1=\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2\,,\ \mathrm{P}_2=\mathrm{X}^5+4\mathrm{X}^4+2\mathrm{X}^3\,,\ \mathrm{P}_3=\mathrm{X}^7+9\mathrm{X}^6+18\mathrm{X}^5+6\mathrm{X}^4$$

donc la réponse A est exacte.

Q32 : Réponses A,D

---

33. L'énoncé indique gentiment la méthode à suivre. On dérive n fois la relation $(1-x)^2f'(x)=(2-x)f'(x)$, en utilisant la formule de Leibniz. On obtient :

$$(1-x)^2f^{(n+1)}(x)-2n(1-x)f^{(n)}(x)+2\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-1)}(x)=(2-x)f^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)$$

d'où

$$(1-x)^2f^{(n+1)}(x)-(2n+1)(1-x)f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)+n^2f^{(n-1)}(x)=0.$$

On en déduit :

$$(1-x)^2\mathrm{P}_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)-(2n+1)(1-x)\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{1-x}\right)-\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{1-x}\right)+n^2\mathrm{P}_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)=0$$

puis en posant $\mathrm{X}=\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{\mathrm{X}^2}\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X})-\frac{2n+1}{\mathrm{X}}\mathrm{P}_n(\mathrm{X})-\mathrm{P}_n(\mathrm{X})+n^2\mathrm{P}_{n-1}(\mathrm{X})=0$$

et enfin :

$$\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X})=[(2n+1)\mathrm{X}+\mathrm{X}^2]\mathrm{P}_n(\mathrm{X})-n^2\mathrm{X}^2\mathrm{P}_{n-1}(\mathrm{X}).$$

Q33 : Réponse B

---

34. $a_n=f^{(n)}(0)=\mathrm{e}\mathrm{P}_n(1)$, donc en faisant $\mathrm{X}=1$ dans la relation précédente, on trouve $a_{n+1}=(2n+2)a_n-n^2a_{n-1}$. C'est la réponse A.

D'après la formule de Taylor-Young (que l'on peut appliquer car f est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0) on a :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f^{(3)}(0)+\frac{x^4}{24}f^{(4)}(0)+\mathrm{o}(x^4)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2}+a_3\frac{x^3}{6}+a_4\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4).$$

On connaît $a_0=f(0)=\mathrm{e}$, $a_1=\mathrm{e}\mathrm{P}_1(1)=2\mathrm{e}$, $a_2=\mathrm{e}\mathrm{P}_2(1)=7\mathrm{e}$ et $a_3=\mathrm{e}\mathrm{P}_3(1)=34\mathrm{e}$, d'où l'on déduit $a_4=8a_3-9a_2=209\mathrm{e}$ puis le DL de f qui est celui de la réponse C.

Q34 : Réponses A,C

---

35. La relation $\mathrm{S}_p(0)=u_p$ est immédiate.

$$\mathrm{S}_p(1)=\sum_{k=0}^{p}\frac{(k+1)!}{(k!)^2}=\sum_{k=0}^{p}\frac{k+1}{k!}=\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{k}{k!}+\frac{1}{k!}\right)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k-1)!}+\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}=u_p+u_{p-1}\,.$$

La réponse B est donc exacte.

D'après la question 6.C, $\lim\limits_{p\to+\infty}u_p=\mathrm{e}$ (obtenu par l'inégalité de Taylor-Lagrange), donc la réponse C est exacte.

Q35 : Réponses B,C

---

36. A. B.

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_p(n+1)-(2n+2)\mathrm{S}_p(n)+n^2\mathrm{S}_p(n-1)&=\sum_{k=0}^{p}\frac{(n+k+1)!}{(k!)^2}-2(n+1)\sum_{k=0}^{p}\frac{(n+k)!}{(k!)^2}+n^2\sum_{k=0}^{p}\frac{(n-1+k)!}{(k!)^2}\\&=\sum_{k=0}^{p}\frac{(n+k+1)!-2(n+1)(n+k)!+n^2(n+k-1)!}{(k!)^2}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(n+k+1)!-2(n+1)(n+k)!+n^2(n+k-1)!&=(n+k-1)!\big[(n+k)(n+k+1)-2(n+1)(n+k)+n^2\big]\\&=(n+k-1)!\big[(n+k)^2-2n(n+k)+k^2-(n+k)\big]\\&=(n+k-1)!(k^2-(n+k))=-(n+k)!+k^2(n+k-1)!\end{aligned}$$

donc finalement :

$$\mathrm{S}_p(n+1)-(2n+2)\mathrm{S}_p(n)+n^2\mathrm{S}_p(n-1)=-\sum_{k=0}^{p}\frac{(n+k)!}{(k!)^2}+\sum_{k=1}^{p}\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!^2}=-\mathrm{S}_p(n)+\mathrm{S}_{p-1}(n).$$

Il s'agit de la réponse A.

C. D.
- La convergence de la suite de terme général $\mathrm{S}_p(n)$ lorsque p tend vers $+\infty$ s'établit facilement par récurrence sur n, puisque les suites $\big(\mathrm{S}_p(0)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\big(\mathrm{S}_p(1)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, et à l'aide de la relation de récurrence précédente.
- Cette même relation de récurrence montre que, si l'on note ℓ_n la limite de la suite $\big(\mathrm{S}_p(n)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ lorsque $p\to+\infty$, on a $\ell_{n+1}-(2n+2)\ell_n+n^2\ell_{n-1}=-\ell_n+\ell_n=0$, donc la suite (ℓ_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (a_n). Puisque $\ell_0=\mathrm{e}=a_0$ et $\ell_1=a_1=2\mathrm{e}$, ces deux suites sont égales.
  On a donc
  $$a_n=\ell_n=\lim_{p\to+\infty}\mathrm{S}_p(n)=\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{(n+k)!}{(k!)^2}=\lim_{p\to+\infty}n!\sum_{k=0}^{p}\frac{(n+k)!}{n!k!}\frac{1}{(k!)}$$
  ce qui est la réponse C.

Q36 : Réponses A,C

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆