CORRIGÉ ENAC 2017

PARTIE I

Les matrices appartenant à $\mathcal{M}$ sont dites pseudo-magiques.
Si $A \in \mathcal{M}$, $s(A)$ représente la somme de chaque ligne ou colonne.

1. A. B. $(aI)^n = \operatorname{diag}(a^n, a^n, \dots, a^n)$ donc cette matrice est pseudo-magique et la somme de chacune de ses lignes/colonnes vaut a^n.

C. D. La matrice J est magique et $s(J) = 3$; de plus on a $J^2 = 3J$ puis par récurrence :

$$\forall n \geqslant 1,\ J^n = 3^{n-1} J\,,$$

mais cette égalité est inexacte pour $n = 0$. Les formules proposées sont donc toutes deux fausses pour $n = 0$ (l'affirmation de la réponse **D.** est cependant exacte pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Q1 : Réponse A

---

2. En calculant la somme des 3 lignes et des 3 colonnes on a :

$$K \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow u + v = 6 = u - 1 = u - 2 = u - 1 = v + 8,$$

et ce système est impossible.

Q2 : Réponse D

---

3. En calculant la somme des 3 lignes et des 3 colonnes on a :

$$K \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow x + a + d = y + b + e = t + z + c = a + b + c = d + e + z = x + y + t\,,$$

ce qui se réécrit en :

$$\begin{cases} x + a + d = a + b + c & (1) \\ y + b + e = a + b + c & (2) \\ t + z + c = a + b + c & (3) \\ d + e + z = a + b + c & (4) \\ x + y + t = a + b + c & (5) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = b + c - d \\ y = a + c - e \\ z = a + b + c - d - e \\ t = -c + d + e \end{cases}$$

puisque $(5) = (1) + (2) + (3) - (4)$. Il s'agit de la réponse **C.**

Les matrices de $\mathcal{M}$ sont donc de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} a & d & b + c - d \\ b & e & a + c - e \\ c & a + b + c - d - e & -c + d + e \end{pmatrix}$$
$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{M}$ est donc le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les 5 matrices ci-dessus ; celles-ci étant linéairement indépendantes (facile), il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 5.

Dans le cas général, l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $(n-1)^2 + 1$.

Q3 : Réponses A, C

---

4. On calcule : $AJ = \begin{pmatrix} L_1(A) & L_1(A) & L_1(A) \\ L_2(A) & L_2(A) & L_2(A) \\ L_3(A) & L_3(A) & L_3(A) \end{pmatrix}$ et $JA = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \end{pmatrix}$.
Les réponses sont alors immédiates.

Q4 : Réponses B, C

---

5. A. B. Si $A, B \in \mathcal{M}$ on a d'après la question précédente :

$$(AB)J = A(BJ) = s(B)AJ = s(A)s(B)J\,,$$

donc $AB \in \mathcal{M}$ et $s(AB) = s(A)s(B)$.

C. D. Si $C \in \mathcal{M}$ est inversible, alors :

$$CJ = s(C)J \Longrightarrow C^{-1}CJ = s(C)C^{-1}J \Longrightarrow J = s(C)C^{-1}J$$

donc $s(C) \neq 0$ et $C^{-1}J = \dfrac{1}{s(C)}J$, ce qui prouve que C^{-1} appartient à $\mathcal{M}$ et que $s(C^{-1}) = \dfrac{1}{s(C)}\cdot$

Q5 : Réponse A

PARTIE II

6. $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1} + x^{2n+3}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2}\cdot$

Q6 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

7. A. B. Pour $x \in [0\,;1]$ on a $x^{2n+3} \leqslant x^{2n+1}$ donc $I_{n+1} \leqslant I_n$ par positivité de l'intégrale. La suite (I_n) est donc décroissante, minorée par 0 (intégrales d'une fonction positive), elle converge donc.

C. « Raison » farfelue !

D. Il y a deux erreurs dans la réponse proposée :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n+1} = 0$ n'est vrai que pour $x \in [0\,;1[$ et non pour $x = 1$.
- Ce n'est pas parce qu'une suite de fonctions (f_n) vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ que l'on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n = \int_0^1 f$: voir contre-exemples dans le cours de Spé.

Q7 : Réponse B

---

8. Puisque $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ pour tout x, on a :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2}\,,$$

et puisque $\dfrac{1}{2n+2} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$, les deux réponses **B.** et **C.** sont exactes.

Il est vrai que cela suffit...Mais les deux autres réponses ne seraient-elles pas exactes elles aussi, puisqu'il n'y a pas de contradiction avec le résultat ci-dessus ?

La réponse est heureusement « non », car pour $n = 0$, $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$, donc les deux inégalités des réponses **A.** et **D.** sont fausses pour $n = 0$...Par contre elles sont vraies à partir d'un certain rang (je n'ai pas cherché lequel !) car l'on peut montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ (voir question **10.** mais je l'ai obtenu directement par changement de variable et application du théorème de convergence dominée).

$$\boxed{\textbf{Q8 : Réponses B, C}}$$

---

9. Pourquoi faire une récurrence alors qu'un calcul direct est possible ?
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-1} = x\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$$

car il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme x et de raison $-x^2 \neq 1$.
On en tire :

$$(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{1+x^2} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-1} - \frac{x}{1+x^2}$$

et enfin en intégrant de 0 à 1 :

$$(-1)^{n+1}I_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Puisque $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ on conclut :

$$\boxed{\textbf{Q9 : Réponse D}}$$

---

10. On fait une intégration par parties :

$$I_n = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{=u}\underbrace{x^{2n+1}}_{=v'}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\,\frac{1}{1+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2n+2}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}x^{2n+2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit :

$$\boxed{\textbf{Q10 : Réponse A}}$$

---

11. De la question **9** réponse **D.** on déduit, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$:

$$\ln 2 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,.$$

C'est un résultat bien connu (somme de la série harmonique alternée).

Donc déjà les réponses **A.**, **B.** et **C.** sont fausses.

Puisque $1+x^2 \geqslant 1$ on a :

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+4}\,,$$

et puisque $\dfrac{1}{2n+4} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ la réponse **D.** est exacte.

$$\boxed{\textbf{Q11 : Réponse D}}$$

---

12. D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 0$ donc d'après la question **10.** on a : $I_n = \dfrac{1}{4n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ soit $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$.

Puis de la question **9** réponse **D.** on tire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 = 2(-1)^{n-1} I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\,.$$

Q12 : Réponse B

PARTIE III

13. Notons C_n l'évènement « jouer avec la pièce C au n-ième lancer ».
Alors C_{n+1} est la réunion disjointe des deux évènements :

$$(C_n \cap F_n) \cup (\overline{C_n} \cap \overline{F_n}).$$

Donc :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}(C_n \cap F_n) + \mathbb{P}(\overline{C_n} \cap \overline{F_n}) \\ &= \mathbb{P}(F_n \mid C_n)\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(\overline{F_n} \mid \overline{C_n})\mathbb{P}(\overline{C_n}) \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Q13 : Réponse A

---

14. La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique, de raison $\dfrac{1}{6}$ et de point fixe $\dfrac{2}{5}$.
Donc $p_n - \dfrac{2}{5} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_1 - \dfrac{2}{5}\right)$, avec $p_1 = \dfrac{1}{2}$. Donc $p_n = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}$.

Q14 : Réponse C

---

15. Facilement, avec les mêmes notations :

$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(F_n \mid C_n)\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(F_n \mid \overline{C_n})\mathbb{P}(\overline{C_n}) = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}(1-p_n) = -\frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3}\,.$$

On en déduit $\mathbb{P}(F_n) = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} - \dfrac{1}{6}\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{3}{5}$.

Q15 : Réponse D

Rem : le problème B est directement copié sur un sujet d'ECRICOME 1992 (mais à l'époque c'étaient des jouets et non des crampons...)

16. En notant K_n (respectivement A_n et N_n) les évènements « le joueur a acheté un crampon de la marque K (resp. A, N) l'année n » on a, puisque (K_n, A_n, N_n) forment un système complet d'évènements :

$$\mathbb{P}(K_{n+1}) = \mathbb{P}(K_{n+1} \mid K_n)\mathbb{P}(K_n) + \mathbb{P}(K_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(K_{n+1} \mid N_n)\mathbb{P}(N_n)$$

soit : $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{4}q_n + \dfrac{1}{4}r_n$.
Même principe pour les autres, il faut juste bien lire l'énoncé ! On trouve :

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \quad \text{ et } \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n\,.$$

Matriciellement cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

et en notant A la matrice 3×3 ci-dessus, on en déduit par récurrence immédiate :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de la réponse **C.** En transposant, on obtient :

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \end{pmatrix} ({}^tA)^n ,$$

mais cela ne correspond à aucune des réponses **A.** ou **D.**

Q16 : Réponse C

---

17. Pour cette question, on pourrait faire les produits matriciels proposés par l'énoncé, mais c'est lassant...
Il s'agit en fait de diagonaliser la matrice A. 1 en est valeur propre (puisque la somme de chaque colonne vaut 1), puis $\operatorname{tr} A = \frac{5}{6}$ et $\det A = -\frac{1}{48}$ permettent de trouver les deux autres valeurs propres : ce sont $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{12}$.
A admet 3 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et est semblable à $D = \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{12}, -\frac{1}{4}\right)$.
On peut donc déjà dire que les réponses **C.** et **D.** sont fausses.
La matrice de la question **A.** n'est pas notre matrice A, réponse fausse donc.
Reste à vérifier la réponse **B.** Pour cela on calcule :

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/12 \\ -1/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est bien la matrice de passage de la base initiale à une base de vecteurs propres.

Enfin, on vérifie que l'on a bien $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{3}{22} & -\frac{3}{22} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et la formule du cours $A = PDP^{-1}$ permet de conclure :

Q17 : Réponse B

Remarque : ces vérifications sont vraiment longues et pénibles. Je pense qu'il valait mieux sauter cette question !

---

18. Puisque $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \operatorname{diag}\left(1, \left(\frac{1}{12}\right)^n, \left(\frac{-1}{4}\right)^n\right)$ on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = P \operatorname{diag}(1, 0, 0) P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

(pour justifier proprement ce passage à la limite, il faut citer la continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$; et cette application est bien continue car linéaire en dimension finie.)
Donc (encore des calculs passionnants) :

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{3}{22} & -\frac{3}{22} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 \\ 4/11 \\ 4/11 \end{pmatrix}.$$

Q18 : Réponse C

PARTIE IV

19. Les réponses **B.** et **C.** sont exactes lorsque x, y, z, t sont *réels* car ce sont alors des résultats classiques sur les modules d'un complexe (module du produit, module du conjugué). Mais comme on ne sait pas de quoi A est un sous-ensemble, on ne peut rien dire, et ces réponses sont fausses en général (d'ailleurs que signifie le module et les calculs avec i si A n'est pas une partie de $\mathbb{C}$?).

Soient $a, b \in S_2(A)$; il existe donc $x, y, z, t \in A$ tels que $a = x^2 + y^2$ et $b = z^2 + t^2$ donc

$$ab = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz - yt)^2 + (yz + xt)^2$$

mais pour conclure que ab appartient encore à $S_2(A)$ il faudrait savoir que $xz-yt$ et $yz+xt$ appartiennent encore à A...

Je ne vois pas trop comment le savoir, puisque l'énoncé dit que A est une vague « structure » (personnellement je ne sais pas ce que cela veut dire !). A moins qu'il ne faille supposer (cela est cohérent avec les questions qui vont suivre) que A est muni d'une *structure d'anneau*... Là cela veut dire quelque chose, et dans ce cas, si x, y, z, t sont dans A, $xz - yt$ et $yz + xt$ sont bien dans A car A est stable par $\times$ et $+$.
Bref :

Q19 : Réponse D ? ? ? ou E ? ? ?

---

20. $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ est l'ensemble des carrés de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$; on les calcule :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

Donc $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}\}$.

On en déduit, en faisant toutes les sommes possibles : $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) + S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

Et de même : $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) + S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$.
Conclusion :

Q20 : Réponse A

---

21. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0$ [8].
En posant $x = a^2 + b^2$ et $y = c^2 + d^2$, et en notant $\bar{\cdot}$ la classe d'un entier modulo 8, on a $\bar{x} \in S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ et $\bar{y} \in S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ tels que $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$.
Or puisque $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\}$, cela n'est possible que si $\bar{x} = \bar{y} = \bar{0}$ ou $\bar{x} = \bar{y} = \bar{4}$ (il suffit de faire la table d'addition dans $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$).

Le premier cas donne $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{c}^2 + \bar{d}^2 = \bar{0}$; sachant que $\bar{a}^2$, $\bar{b}^2$, $\bar{c}^2$ et $\bar{d}^2$ sont dans $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}\}$, cela n'est possible que si $(\bar{a}^2, \bar{b}^2) \in \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{4})\}$, idem pour $(\bar{c}^2, \bar{d}^2)$. En regardant la table des carrés, on voit que cela implique a, b, c, d congrus à $0, 2, 4$ ou 6, donc ils sont pairs.

Le second cas donne $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{c}^2 + \bar{d}^2 = \bar{4}$; sachant que $\bar{a}^2$, $\bar{b}^2$, $\bar{c}^2$ et $\bar{d}^2$ sont dans $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}\}$, cela n'est possible que si $(\bar{a}^2, \bar{b}^2) \in \{(\bar{0}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{0})\}$, idem pour $(\bar{c}^2, \bar{d}^2)$. On conclut comme précédemment que a, b, c, d sont nécessairement pairs.

Q21 : Réponse D

---

22. Soit $n \equiv -1$ [8]. Si n appartenait à $S_3(\mathbb{Z})$, il existerait des entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 + c^2 = n$, d'où dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$: $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + \bar{1} = \bar{0}$. Cela est impossible d'après la question précédente.

Ainsi, par l'absurde, $n \notin S_3(\mathbb{Z})$.

L'implication $n \notin S_3(\mathbb{Z}) \Longrightarrow n \notin S_3(\mathbb{Q})$ est vraie, mais absolument pas triviale (voir une démonstration en annexe, ou c'est aussi une conséquence du théorème de Davenport-Cassels).
Si quelqu'un connaît une solution plus simple, je suis preneur !

Q22 : Réponse B

---

23. $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas multiplicatif : en effet, $3 \in S_3(\mathbb{Z})$ car $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$ et $5 \in S_3(\mathbb{Z})$ car $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$, mais $15 = 3 \times 5$ ne peut appartenir à $S_3(\mathbb{Z})$ car $15 \equiv -1\ [8]$.

Donc $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicatif (s'il l'était, $S_3(\mathbb{Z})$ le serait aussi !) ; c'est la réponse **B.**. La réponse **C.** n'est pas très claire : en fait, $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicatif car $S_3(\mathbb{Z})$ *ne l'est pas...* Je la considèrerai donc comme fausse.

Q23 : Réponse B

PARTIE V

24. Par définition de la matrice d'un système de vecteurs (coordonnées de ces vecteurs = colonnes de la matrice), on a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q24 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

25. Le déterminant de P est égal à 2 donc P est inversible. On trouve ensuite (calculs à savoir faire rapidement, ou bien faire le produit de P par les matrices proposées) : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Q25 : Réponse A

---

26. C'est du cours.

Q26 : Réponses C, D

---

27. p_F est la projection sur $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}(u_3)$, et p_G est la projection sur G parallèlement à F (puisque d'après la matrice on a $p_F(u_1) = u_1$, $p_F(u_2) = u_2$ et $p_F(u_3) = 0$).
Donc d'après le cours :

Q27 : Réponse B

---

28. Toujours d'après le cours :

Q28 : Réponse D

---

29. D'après les formules de changement de bases pour une application linéaire, on a, puisque P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, $Q = P^{-1} A_F P$ et $Q' = P^{-1} A_G P$.
Donc :

$$A_F = PQP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc inutile d'aller plus loin !

Q29 : Réponse E (aucune réponse exacte)

Remarque : vous n'aviez pas forcément besoin de faire le calcul ci-dessus. Puisque $p_F(u_1) = u_1$, on doit avoir $A_F \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, puisque $p_F(u_2) = u_2$ on doit avoir $A_F \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ etc...

PARTIE VI

30. $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1+a^2u^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan(au)\right]_0^t = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan(at)$.

Q30 : Réponse B

---

31. f est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur de la fraction de n'annule jamais ($x > 0$) et d'après les théorèmes usuels (opérations algébriques sur les fonctions continues).

f est paire et π-périodique donc (réfléchissez et faites un petit dessin !) :

Q31 : Réponses B, C

---

32. f est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc je ne comprends pas bien la phrase « valeurs de t convenablement choisies »...

On calcule $f'(t)$ avec les formules habituelles et on trouve :

Q32 : Réponse D

---

33. Si $x = 1$ f est constante donc f' est nulle.

Sinon f' s'annule pour $t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Sa courbe admet donc des trangentes parallèles à l'axe Ox pour $t = k\pi$ et $t = \frac{\pi}{2} + k'\pi$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$.

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ $f'(t)$ est du signe de $1 - x$. Si $x < 1$ elle est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et varie de 1 à $\dfrac{1}{x}$ (on rappelle que $x > 0$). Elle admet donc en $\frac{\pi}{2}$ un maximum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ qui vaut $\dfrac{1}{x}$ et ce sera aussi son maximum sur $\mathbb{R}$.
Si $x > 1$ elle décroit de 1 à $\dfrac{1}{x}$ et admet donc $\dfrac{1}{x}$ pour minimum.

Q33 : Réponses C, D

---

34. **A. B.** La courbe étant symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ on peut directement dire que l'intégrale de 0 à π est le double de celle de 0 à $\frac{\pi}{2}$.
On peut aussi faire un changement de variable :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{u=\pi-t}{=} -\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-u)(-\,\mathrm{d}u) = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(u)\,\mathrm{d}u$$

donc $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f$.

C. D. f étant continue (par rapport à t !), l'application $u \mapsto \displaystyle\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en 0, donc est continue.

Conclusion :

Q34 : Réponses A, D

35.

$$H(a) = \int_0^a \frac{1}{\cos^2 t + x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{1 + x\tan^2 t}\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}}_{=\mathrm{d}(\tan t)}$$

$$\underset{u=\tan t}{=} \int_0^{\tan a} \frac{\mathrm{d}u}{1 + xu^2}\,.$$

$$\boxed{\textbf{Q35 : Réponse B}}$$

---

36. D'où, puisque $x > 0$: $H(a) = \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{Arc}\tan(u\sqrt{x})\right]_{u=0}^{u=\tan a} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{Arc}\tan\left(\sqrt{x}\tan a\right)$.

Puis en faisant tendre $a \to \frac{\pi}{2}^-$: $H(a) \to \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ d'où $I = 2\lim_{a\to\frac{\pi}{2}} H(a) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}\cdot$

$$\boxed{\textbf{Q36 : Réponse D}}$$

En pages suivantes, la démonstration (en Anglais) de mon assertion de la question **22**.

SUMS OF SQUARES IN Q AND F(T)

KEITH CONRAD

1. Introduction

To illustrate the analogies between integers and polynomials, we prove a theorem about sums of squares over $\mathbf{Z}$ and then prove an analogous result in $F[T]$ (where F does not have characteristic 2). Specifically, we will show that if an integer is a sum of 2 or 3 rational squares then it is in fact a sum of 2 or 3 integer squares. The polynomial analogue is stronger: if a polynomial is a sum of n squares of rational functions for any n then it is a sum of n squares of polynomials. The proof in the polynomial case is essentially the same as the integer case.

2. The integer case

Theorem 2.1. *If an integer is a sum of two rational squares then it is a sum of two integral squares. If an integer is a sum of three rational squares then it is a sum of three integral squares.*

Example 2.2. We have $193 = (1512/109)^2 + (83/109)^2$, $193 = (933/101)^2 + (1048/101)^2$, and $193 = 7^2 + 12^2$.

Example 2.3. We have $13 = (18/11)^2 + (15/11)^2 + (32/11)^2$, $13 = (2/3)^2 + (7/3)^2 + (8/3)^2$, and $13 = 0^2 + 3^2 + 2^2$.

Proof. Suppose $v = (s_1, s_2) \in \mathbf{Q}^2$ satisfies $s_1^2 + s_2^2 = a$. We we will write this as $v \cdot v = a$. If s_1 and s_2 are in $\mathbf{Z}$, we're done, so we assume at least one of them is not in $\mathbf{Z}$. Write the s_i's with a common denominator: $s_i = m_i/d$ where the m_i's and d are in $\mathbf{Z}$ and $d \neq \pm 1$. We want to find a $w \in \mathbf{Q}^2$ such that $w \cdot w = v \cdot v$ and w has a common denominator of smaller size than v. Repeating this enough times, we will eventually get a common denominator of 1, meaning we have a as a sum of integer squares.

In $\mathbf{Z}$, divide each m_i by the common denominator d:

$$m_i = dq_i + r_i$$

where q_i and r_i are in $\mathbf{Z}$ and $|r_i| \leq d/2$. Since s_1 and s_2 are not both in $\mathbf{Z}$, some r_i is nonzero. Thus $v = (s_1, s_2) = \mathbf{q} + (1/d)\mathbf{r}$ where $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ and $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ are in $\mathbf{Z}^2$ and $\mathbf{r} \neq (0, 0)$.

Using the dot product,

$$v \cdot v = \left(\mathbf{q} + \frac{1}{d}\mathbf{r}\right) \cdot \left(\mathbf{q} + \frac{1}{d}\mathbf{r}\right) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{d^2}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{2}{d}\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}. \tag{2.1}$$

Since $\mathbf{q}$ and $\mathbf{r}$ are integral vectors the dot products $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, and $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$ are in $\mathbf{Z}$. Since $|r_i| \leq d/2$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r_1^2 + r_2^2 \leq 2(d/2)^2 = d^2/2$, so $(1/d^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \leq 1/2$.

Since $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, we can consider the reflection $w = \tau_{\mathbf{r}}(v)$. From the properties of reflections, $w \cdot w = v \cdot v = a$. We will show the coordinates of $w \in \mathbf{Q}^2$ have a smaller common denominator than the common denominator d for v.

Explicitly,

$$\begin{aligned} w &= \tau_{\mathbf{r}}(v) \\ &= \tau_{\mathbf{r}}(\mathbf{q} + (1/d)\mathbf{r}) \\ &= \tau_{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) - \frac{1}{d}\mathbf{r} \\ &= \left(\mathbf{q} - \frac{2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{r}\right) - \frac{1}{d}\mathbf{r} \\ &= \mathbf{q} - \left(\frac{2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{d}\right)\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Multiplying (2.1) by $d/(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})$,

$$\frac{d(v\cdot v)}{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = \frac{d(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})}{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{d} + \frac{2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}},$$

so

$$w = \mathbf{q} - \frac{d(v\cdot v - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r})}{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{r} = \mathbf{q} - \frac{v\cdot v - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})/d}\mathbf{r},$$

where the denominator $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})/d$ is an integer: by (2.1),

$$\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{d} = d(v\cdot v - \mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) - 2\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}$$

and the right side is in $\mathbf{Z}$. We noted before that $(1/d^2)\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \le 1/2$, so $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})/d$ is at most $d/2 < d$, which means the common denominator for w is less than that for v, so we are done with the sum of two squares case.

The exact same proof works for a sum of three squares, using dot products and reflections in three dimensions instead of two dimensions. The only change to be made is the following: now we have $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ where $|r_i| \le (1/2)d$, so $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \le (3/4)d^2$ instead of $(1/2)d^2$. Now $(1/d^2)\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \le 3/4$ instead of $1/2$, so $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})/d \le (3/4)d$ instead of $d/2$. This is still less than d, so everything still works in the proof when it is done for sums of three squares. $\square$