CORRIGÉ ENAC 2015

PARTIE I

1. La congruence modulo n est une relation d'équivalence, c'est une question de cours.

Q1 : Réponse C

---

2. **A.** On sait que les congruences sont compatibles avec l'addition et la multiplication ; en particulier, si $a \equiv b \pmod{n}$, alors :

$$\forall\, p \in \mathbb{Z},\ pa \equiv pb \pmod{n} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ a^k \equiv b^k \pmod{n},$$

et si $a \equiv b \pmod{n}$ et $a' \equiv b' \pmod{n}$, alors

$$a + a' \equiv b + b' \pmod{n},$$

donc si $\mathrm{P} = \sum p_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(a) \equiv \mathrm{P}(b) \pmod{n}$.

B.D. Les deux réponses sont fausses, il n'est pas difficile de trouver des contre-exemples.

C. Cette réponse est exacte, car si $a-b$ est multiple de n, et si n est multiple de m, alors $a-b$ est aussi multiple de m.

Q2 : Réponses A, C

---

3. On calcule facilement :

$$5^2 = 25 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13} \text{ d'où } 5^4 = (5^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{13}.$$

Q3 : Réponse B

---

4. D'où immédiatement :

$$5^{4k+r} = (5^4)^k 5^r \equiv 5^r \pmod{13}.$$

Q4 : Réponse C

---

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 4 s'écrit $n = 4k + r$ avec $r \in \{0,1,2,3\}$; d'après la question précédente, le reste de la division de 5^n par 13 est le même que celui de 5^r. Or

$$5^0 \equiv 1 \pmod{13},\ 5^1 \equiv 5 \pmod{13},\ 5^2 \equiv 12 \pmod{13},\ 5^3 \equiv 60 \equiv 8 \pmod{13},$$

donc les restes possibles sont $1,\ 5,\ 8$ et 12 (un reste est par définition positif, donc la réponse **A.** est fausse).

Q5 : Réponse B

---

6. En notant toujours r le reste dans la division euclidienne de n par 4, on a :

$$\mathrm{A}_n = 1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n} \equiv 1 + 5^r + 5^{2r} + 5^{3r} \equiv 1 + 5^r + (-1)^r + (-5)^r \pmod{13}.$$

Donc :

- pour $r = 0$, $\mathrm{A}_n \equiv 4 \pmod{13}$;
- pour $r \in \{1,3\}$, $\mathrm{A}_n \equiv 0 \pmod{13}$;
- pour $r = 2$, $\mathrm{A}_n \equiv 1 + 25 + 1 + 25 \equiv 0 \pmod{13}$.

et en conclusion :

Q6 : Réponse B

PARTIE II

7. On utilise ici le seul fait qu'une fonction continue (par morceaux) sur un segment $[a;b]$ y est intégrable. La bonne réponse est donc la réponse **A.** En effet, les propriétés énoncées dans les réponses **B. C. D.** sont exactes, mais ne suffisent pas pour justifier l'existence de f.

Q7 : Réponse A

---

8. On utilise ici le résultat suivant :

   Soit f une application continue de I dans $\mathbb{K}$, et u, v deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur un intervalle J, à valeurs dans I.

   Alors, la fonction $\mathrm{F}: \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{J} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et on a

$$\forall\, x \in \mathrm{J},\ \mathrm{F}'(x) = v'(x).f\big(v(x)\big) - u'(x).f\big(u(x)\big).$$

On obtient donc ici :

$$\forall\, x > 0,\ f'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)} = \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}.$$

Et puisque $2\ln(1+x^2) = \ln\big((1+x^2)^2\big) = \ln(x^4+2x^2+1)$, on conclut :

Q8 : Réponse B

---

9. On en déduit :

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 > 4x^2 + 1 \Longleftrightarrow x^2(x^2-2) > 0 \underbrace{\Longleftrightarrow}_{\text{car } x>0} x > \sqrt{2}.$$

Q9 : Réponse C

---

10. La fonction $g\colon t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme inverse d'une fonction croissante positive.

Donc pour $t \in [x;2x]$ on a $g(t) \geqslant g(2x) = \dfrac{1}{\ln(1+4x^2)}$ d'où

$$f(x) \geqslant \int_x^{2x} g(2x)\,\mathrm{d}t = xg(2x) = \frac{x}{\ln(1+4x^2)}.$$

D'après les résultats sur les croissances comparées des fonctions usuelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Cependant, si on lit attentivement, on se rend compte qu'aucune des inégalités proposées n'est exacte ! Donc :

Q10 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

11. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, l'encadrement :

$$\forall t \in [x\,;2x],\ g(2x) \leqslant g(t) \leqslant g(x)$$

conduit à l'inégalité de la réponse **C.**

Q11 : Réponse C

---

12. On a :

$$\frac{x}{\ln(1+x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x^2} = \frac{x}{2\ln x},$$

et

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln 4x^2} = \frac{x}{\ln 4 + 2\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2\ln x},$$

donc l'encadrement de la question précédente donne :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2\ln x}.$$

Q12 : Réponse B

---

13. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ donc :

Q13 : Réponse C

PARTIE III

14. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = 5x^4 + n,$$

donc f_n est strictement croissante. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, le théorème de bijection affirme que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
En particulier, 0 a un seul antécédent u_n par f (le résultat est aussi vrai pour $n = 0$, je ne vois pas pourquoi l'énoncé exclut ce cas pour l'instant).
Notons aussi que, puisque $f_n(0) = -1$, on a nécessairement $u_n > 0$ pour tout n.

Q14 : Réponse A

---

15. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier n on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x,$$

donc $f_{n+1}(u_n) = u_n > 0$ et puisque f_{n+1} est croissante et que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, cela implique $u_n > u_{n+1}$ c'est-à-dire (u_n) strictement décroissante.

N.B : *Je ne vois pas ce que vient faire la phrase « $x \in [1\,;e]$ » ici, puisque le résultat ne dépend pas d'un quelconque x ! Mais ce n'est pas faux...*

Q15 : Réponse B

---

16. *Même remarque ici sur ce mystérieux x qui apparaît, en plus d'une faute de Français...*

Deuxième remarque : les encadrements proposés, s'ils sont justes, permettent à eux seuls de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, *il n'y a donc rien* à déduire *de la question précédente.*

Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^5 > 0$ et $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{1}{2n}\right)^5 - \frac{1}{2} < 0$ donc puisque f_n est strictement croissante on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n} < u_n < \frac{1}{n},$$

ce qui implique d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Q16 : Réponse A

---

17. La relation $f_n(u_n) = 0$ implique $nu_n - 1 = -u_n^5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n - 1 = 0$ soit $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

De plus, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1}$ donc :

Q17 : Réponses B, C

---

18. La relation $1 - nu_n = u_n^5$ implique $\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n}$ et puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, on en déduit :

$$\frac{1}{n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^6}.$$

Q18 : Réponse A

PARTIE IV

19. Pas de difficulté ici, on applique les théorèmes usuels.

Q19 : Réponses A, B

---

20. Simple calcul :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{1+x^2}.$$

Q20 : Réponse B

---

21. $k'(0) = 0$ et $k(0) = 0$ donc l'équation de la tangent à la courbe de k à l'origine est $y = x$.

Q21 : Réponse C

---

22. $k'(1) = 0$ donc :

Q22 : Réponse A

---

23. On factorise :

$$\forall x > 0,\ k(x) = x - \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = x - 2\ln x - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x\left(1 - \frac{2\ln x}{x} - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$ on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

Remarque : cf. l'erratum puis l'erratum de l'erratum pour la grossière erreur d'énoncé !

Q23 : Réponse A

---

24. *Encore une faute de frappe : il fallait lire $k(u_n)$ et non $k \times u_n$; cela a été dit dans un erratum faxé aux centres d'examen, mais était quand même facilement décelable.*

    Pour tout $x > 0$ on a $k(x) > 0$ (car k est strictement croissante et $k(0) = 0$). On en déduit par récurrence que la suite (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
    D'autre part, $k(x) < x$ pour tout $x > 0$, donc $k(u_n) < u_n$, soit $u_{n+1} < u_n$: la suite u est strictement décroissante.
    Les réponses **A. B. D.** sont donc inexactes.

    La réponse **C.** est exacte ; en effet, on a bien $u_1 < u_0$ (voir ci-dessus, ou on calcule $u_1 = 1 - \ln 2$) ; k étant croissante (cf. calcul de k'), on en déduit $k(u_1) \leqslant k(u_0)$ soit $u_2 \leqslant u_1$, puis plus généralement $u_{n+1} \leqslant u_n$ par récurrence facile.

Q24 : Réponse C

---

25. On vient de voir que la suite u est à valeurs strictement positives, et décroissante. Donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.
    De plus, étant minorée par 0, elle l'est aussi par -1 !

Q25 : Réponses B, C

---

26. $k(u_n) = u_{n+1}$ donne $k(\ell) = \ell$ par passage à la limite parce que k est continue (elle est en fait continue sur $\mathbb{R}$ mais la continuité sur $\mathbb{R}_+$ évoquée par l'énoncé suffit puisque u est à valeurs positives).

    Remarque : la continuité de k prouve seulement que ℓ est *une* solution de l'équation $k(x) = x$; pour démontrer l'unicité de cette solution, il faudrait par exemple étudier la fonction $x \mapsto k(x) - x$. On pourrait donc considérer que la réponse **A.** est incomplète...
    Remarque utile pour la suite : la seule solution de l'équation $k(x) = x$ est $x = 0$; on a donc $\ell = 0$.

Q26 : Réponse A ?

---

27. On peut dire d'emblée que les réponses **B. C. D.** sont fausses, car l'inégalité écrite impliquerait $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = -\infty$, ce qui n'est pas.

    Pour étudier l'inégalité proposée sur $[0;1]$, il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) - k(x) = \ln(1+x^2) - \dfrac{x^2}{2}$ ou encore la fonction $\varphi \colon x \mapsto \ln(1+x) - \dfrac{x}{2}$.

    Or pour $x \in [0;1]$ $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{2} \geqslant 0$ donc φ est croissante et puisque $\varphi(0) = 0$ on a $\varphi(x) \geqslant 0$.
    En résumé :

    $$\forall x \in [0;1],\ \ln(1+x) \geqslant \frac{x}{2},$$

    donc

    $$\forall x \in [0;1],\ \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - k(x) \geqslant 0.$$

Q27 : Réponse A

---

28. Puisque (u_n) est décroissante et $u_0 = 1$ on a bien $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    D'après la question précédente, on en déduit : $u_{n+1} = k(u_n) \leqslant u_n - \dfrac{1}{2}u_n^2$ donc $u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$. C'est la réponse **B.**, mais la réponse **C.** est également exacte puisque $\dfrac{1}{2}u_n^2 \leqslant u_n^2$!

Enfin, les réponses **A. D.** sont fausses car la justification $u_n \geqslant 0$ n'est pas suffisante.

$\boxed{\textbf{Q28 : Réponses B, C}}$

---

29. La suite (S_n) est évidemment croissante (somme partielle d'une série à termes positifs), et l'inégalité $S_n \leqslant T_n$ découle directement de la question précédente.

Puisque $u_k - u_{k+1} \geqslant 0$ pour tout k (la suite u est décroissante), la suite (T_n) est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs donc est croissante.

$\boxed{\textbf{Q29 : Réponses A, D}}$

---

30. Par télescopage, on a $T_n = 2(u_0 - u_{n+1})$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (voir question **26.**), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 2u_0 = 2$.

(T_n) étant croissante, 2 en est la borne supérieure. Puis la suite (S_n) étant croissante majorée par 2, elle converge.

$\boxed{\textbf{Q30 : Réponse D}}$

PARTIE V

31. En multipliant l'égaité $A^n + A^{n-1} + \cdots + A + I = 0$ par $(A - I)$, on obtient $A^{n+1} - I = 0$.
Donc $A(A^n) = I$, et ainsi :

$\boxed{\textbf{Q31 : Réponse A}}$

---

32. On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ puis $A^4 = I_3$. Donc A vérifie P(3).

Par suite, $A^{-1} = A^3 = \begin{pmatrix} 1-2i & 1-i & -1+i \\ 0 & -i & 0 \\ 2-2i & 2-2i & -2+i \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Q32 : Réponses A, D}}$

---

33. Notons déjà que l'égalité donnée dans l'énoncé n'est vraie que pour $\left|\frac{a}{\lambda}\right| < 1$...

Supposons $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, alors $A^n = O_n$ et pour $\lambda \neq 0$, l'indication de l'énoncé suggère de calculer :

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\left(I + \frac{1}{\lambda}A + \cdots + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} A^{n-1}\right) = I - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n A^n = I,$$

ou encore :

$$(A - \lambda I)\left(-\frac{1}{\lambda}I - \frac{1}{\lambda^2}A - \cdots - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n A^{n-1}\right) = I.$$

En conclusion :

$\boxed{\textbf{Q33 : Réponse B}}$

---

34. La matrice considérée ici est une matrice *à diagonale strictement dominante*. Le théorème d'Hadamard (dont on trouve la démonstration un peu partout, et que je ne reproduis pas ici) affirme alors qu'une telle matrice est inversible.

$\boxed{\textbf{Q34 : Réponse B}}$

---

35. Facilement, $\det B = -1$ donc B est inversible, et on vérifie alors que (nul besoin de calculer B^{-1}, on peut se contenter de vérifier les réponses proposées en faisant le produit matriciel) :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q35 : Réponse C

---

36. Comme le signale l'erratum il fallait lire $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$.

En ajoutant la ligne n°1 aux deux autres : $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (deux lignes proportionnelles), donc C n'est pas inversible.

Q36 : Réponse A

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆