ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2007**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS
DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

Épreuve optionnelle obligatoire de MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 3

Ce sujet comporte (dans l'énoncé d'origine, pas dans cette version) :
- 1 page de garde,
- 2 pages d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissement
- 11 pages de texte, numérotées de 1 à 11

CALCULATRICE AUTORISÉE

Remarque : les erreurs de syntaxe … du sujet initial ont été respectées.

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

DE MATHÉMATIQUES

À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve « optionnelle obligatoire de mathématiques » de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

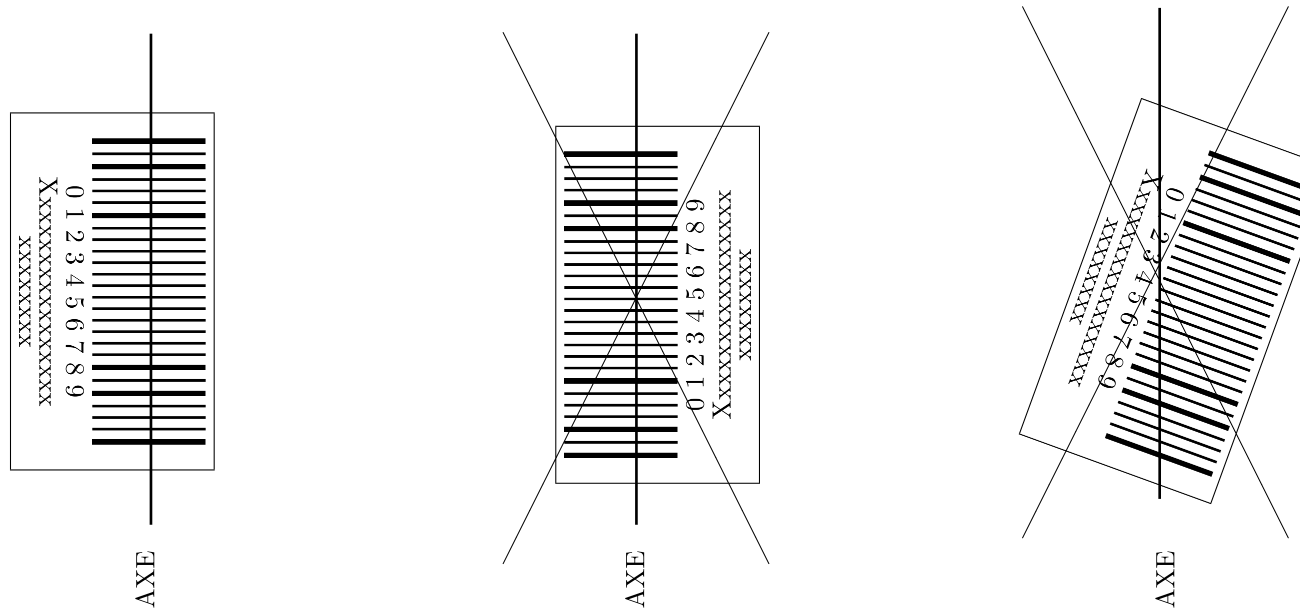
1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve optionnelle obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :

BON MAUVAIS MAUVAIS



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.
5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée au début du texte du sujet.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
  la ligne correspondante doit rester vierge.
- ► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
  vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
- ► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
  vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.
- ► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
  vous devez alors noircir la case E.

Atttention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

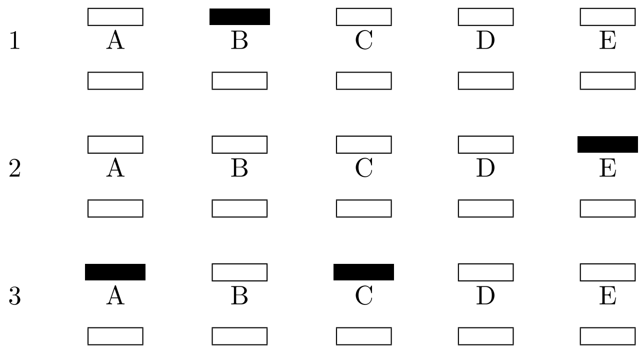
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D)2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENT

QUESTIONS LIÉES

1 à 9
10 à 15
16 à 30
31 à 40

PARTIE I

Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E pour lequel il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels à une indéterminée X, tel que
0 est racine de P, 0 n'est pas racine de P', P est un polynôme annulateur de f
P' désignant le polynôme dérivé de P.
$\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$) désigne le corps des réels (respectivement le corps des complexes).

Question 1 : Le polynôme P s'écrit

A) $P(X) = X^2Q(X)$ avec Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$

B) $P(X) = XQ(X)$ avec Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$

C) $P(X) = XQ(X)$ avec Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0)$ est différent de 0

D) $P(X) = XQ(X)$ avec Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q'(0)$ est différent de 0

Question 2 : Dans la suite on note Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ diviseur de P n'admettant pas 0 pour racine, alors

A) les polynômes X et Q sont premiers entre eux car leur PGCD est 1

B) les polynômes X et Q ne sont pas premiers entre eux car leur PGCD est X

C) les polynômes X et Q sont premiers entre eux car leur PGCD est X

D) les polynômes X^2 et Q sont premiers entre eux puisqu'ils vérifient l'égalité de Bezout

Question 3 : On a alors pour un polynôme Q vérifiant $P = XQ$

A) $E = \operatorname{Ker} f^2 + \operatorname{Ker} Q(f)$ d'après le théorème de décomposition des noyaux

B) $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} Q(f)$ d'après le théorème de décomposition des noyaux

C) $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} Q(f)$ d'après le théorème de décomposition des noyaux

D) $fQ(f) = 0$ car $P(f) = 0$

Question 4 : Dans cette question et la suivante, on suppose E de dimension finie n, on a alors

A) $\dim \operatorname{Ker} Q(f) = n - \dim \operatorname{Ker} f^2$

B) $\dim \operatorname{Im} Q(f) = n - \dim \operatorname{Im} f$

C) $\dim \operatorname{Ker} Q(f) = \dim \operatorname{Im} f^2$ d'après le théorème du rang

D) $\dim \operatorname{Im} Q(f) = \dim \operatorname{Ker} f$ d'après le théorème du rang

Question 5 : A) $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ propriété vraie pour tout endomorphisme f de E

B) le sous-espace $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\operatorname{Ker} Q(f)$ car $Q(f) \circ f = f \circ Q(f) = P(f) = 0$

C) le sous-espace $\operatorname{Im} f^2$ est inclus dans $\operatorname{Ker} Q(f)$ car $Q(f) \circ f^2 = f^2 \circ Q(f) = P(f) = 0$

D) $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ car $\operatorname{Ker} Q(f) = \operatorname{Im} f$

Question 6 : On suppose, dans les questions 6 et 7, l'espace vectoriel E de dimension quelconque

A) $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\operatorname{Ker} Q(f)$ car $Q(f)f = fQ(f) = P(f) = 0$

B) $\operatorname{Im} f^2$ est inclus dans $\operatorname{Ker} Q(f)$ car $Q(f) \circ f^2 = f^2 \circ Q(f) = 0$

C) Q est tel que $Q(X) = a + XQ_1(X)$ avec Q_1 appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et $a = Q(0)$

D) Q est tel que $Q(X) = XQ_2(X)$ avec Q_2 appartenant à $\mathbb{R}[X]$

Question 7 : On en déduit

A) $\operatorname{Ker} Q(f)$ est inclus dans $\operatorname{Im} f$ car pour tout x appartenant à $\operatorname{Ker} Q(f)$, on a
$x = f\left(-(1/a)Q_1(f)(x)\right)$, a étant non nul

B) $\operatorname{Ker} Q(f)$ est inclus dans $\operatorname{Im} f$ car pour tout x appartenant à $\operatorname{Ker} Q(f)$, on a
$x = f\left(-(1/a)Q_1(f(x))\right)$, a étant non nul

C) $\operatorname{Ker} Q(f)$ est inclus dans $\operatorname{Im} f$ car pour tout x appartenant à $\operatorname{Ker} Q(f)$, on a
$x = -(1/a)f(x)Q_1(f)(x)$, a étant non nul

D) $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ car $\operatorname{Ker} Q(f) = \operatorname{Im} f$

Question 8 : On suppose dorénavant l'espace vectoriel E de dimension n et f un endomorphisme de E pour lequel le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X(X-1)^2$ est annulateur de f

A) le spectre dans $\mathbb{C}$ de l'endomorphisme f contient strictement l'ensemble $\{0, 1\}$

B) le spectre dans $\mathbb{C}$ de l'endomorphisme f est inclus dans l'ensemble $\{0, 1\}$

C) le spectre dans $\mathbb{C}$ de l'endomorphisme f ne peut contenir 0

D) le spectre dans $\mathbb{C}$ d'un endomorphisme défini sur $\mathbb{R}$-espace vectoriel est nécessairement inclus dans $\mathbb{R}$

Question 9 : La trace de l'endomorphisme f

A) est un nombre entier strictement positif

B) n'appartient pas nécessairement à l'ensemble des entiers

C) est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1

D) est nulle si et seulement si $f = 0$ car dans le cas où $\operatorname{tr}(f)$ est nulle, 0 étant l'unique valeur propre de f, l'endomorphisme $f - id$ est bijectif et $f(f - id)^2 = 0$ entraîne $f = 0$

PARTIE II

On considère la matrice A appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}_{13}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 13 à coefficients réels $a_{i,j}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = 7$ ou $j = 7$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
On note f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{13})$ canoniquement associé à la matrice A c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_i)_{i=1,13}$ de $\mathbb{R}^{13}$ est A.
$\mathbb{R}$ désigne le corps des réels.

Question 10 : L'endomorphisme f

A) est un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{13}$ autoadjoint car la matrice A est symétrique réelle

B) n'est pas diagonalisable

C) est diagonalisable dans une base orthonormale formée de vecteurs propres de f

D) est un automorphisme

Question 11 : On a

A) 0 n'appartient pas au spectre de f

B) 0 est valeur propre de f de multiplicité m_0 inférieure ou égale à 10 car
$$m_0 < \dim \operatorname{Ker} f = 13 - \operatorname{rg} f = 11$$

C) 0 est valeur propre de f de multiplicité m_0 strictement supérieure à 11 car
$$m_0 > \dim \operatorname{Ker} f = 13 - \operatorname{rg} f = 11$$

D) 0 est valeur propre de f de multiplicité $m_0 = 12$ car, f étant diagonalisable,
$$m_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 13 - \operatorname{rg} f = 12 \text{ puisque } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_7)$$

Question 12 : On note g la restriction de l'endomorphisme f au sous-espace $\operatorname{Im} f$

A) g n'est pas définie

B) g est un endomorphisme de $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_7, u)$ avec $u = e_1 + e_2 + \cdots + e_{13}$

C) dans la base (e_7, u) de $\operatorname{Im} f$, où $u = e_1 + e_2 + \cdots + e_{13}$, la matrice de g s'écrit
$$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D) dans la base (e_7, u) de $\operatorname{Im} f$, pù $u = e_1 + e_2 + \cdots + e_{13}$, la matrice de g s'écrit
$$\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 13 : On note χ_g (respectivement χ_f) le polynôme caractéristique de g (respectivement f). On a

A) $\chi_g(X) = X^2 - X - 12$

B) $\chi_g(X) = X^2 - 13X + 12$

C) $\chi_f(X) = X^{11}(X^2 - X - 12)$

D) $\chi_f(X) = X^{11}(-X^2 + 13X - 12)$

Question 14 : On en déduit

A) le spectre de la matrice A est l'ensemble $\{0, 1, 12\}$

B) le spectre de la matrice A est l'ensemble $\{-3, 0, 4\}$

C) la matrice A est semblable à la matrice diagonale $D = UAU^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & (0) \\ 0 & -3 & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$, U désignant la matrice de passage de la base canonique à la base, choisie, de vecteurs propres

D) la matrice A est semblable à la matrice diagonale $D = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (0) \\ 0 & 12 & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$, U désignant la matrice de passage de la base canonique à la base, choisie, de vecteurs propres

Question 15 : Pour tout n entier strictement positif, on obtient, en posant P_i, $i = 1$ ou 2, la matrice de $\mathcal{M}_{13}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $i^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1 et en désignant par U la matrice de passage U désignant la matrice de passage de la base canonique à la base, choisie, de vecteurs propres

A) $A^n = 4^n A_1 + (-3)^n A_2$ avec $A_1 = UP_1U^{-1}$ et $A_2 = UP_2U^{-1}$

B) $A^n = A_1 - 12^n A_2$ avec $A_1 = U^{-1}P_1U$ et $A_2 = U^{-1}P_2U$

C) $A^n = \left[((3/7)4^{n-1}) + ((4/7)(-3)^{n-1})\right] A + \left[((1/7)4^{n-1}) - ((1/7)(-3)^{n-1})\right] A^2$

D) $A^n = 4^n P_1 + (-3)^n P_2$

PARTIE III

On considère les séries de fonctions de terme général u_n, v_n, w_n définies par
$u_n(x) = (-1)^n/(n+x)$ pour tout n entier strictement positif et pour tout x réel positif ou nul
$v_n(x) = (\cos nx)/(n^2-1)$ pour tout n entier supérieur ou égal et pour tout x réel
$w_n(x) = a_n x^n$ pour tout entier naturel n avec $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left((1+t^2)/2\right)^n \, \mathrm{d}t$
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels

Question 16 : La série de fonctions de terme général u_n converge

A) simplement sur $[0, +\infty[$ car elle converge absolument sur cet intervalle

B) simplement en tout point x de $[0, +\infty[$ donc converge uniformément sur $[0, +\infty[$

C) normalement sur $[0, +\infty[$ car la suite numérique de terme général $\sup\limits_{x \in [0,+\infty[} |u_n(x)|$ converge vers 0

D) uniformément sur $[0, +\infty[$ car pour tout x réel positif ou nul le reste R_n d'ordre n de la série vérifie $|R_n(x)| \leqslant 1/(n+1+x)$ et la suite de fonctions de terme général $1/(n+1+x)$ converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$, condition suffisante de convergence uniforme de la suite (R_n) vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$

Question 17 : La série de fonctions de terme général v_n converge

A) normalement sur $\mathbb{R}$ car toute série de fonctions absolument convergente sur un ouvert converge normalement sur cet ouvert

B) normalement sur $\mathbb{R}$ car pour tout n entier supérieur ou égal à 2 et pour tout x réel on a $|v_n(x)| \leqslant 1/(n^2-1)$ terme général d'une série convergente, mais cette série de fonctions ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}$

C) normalement sur tout fermé de $\mathbb{R}$ uniquement car il ne peut y avoir convergence normale sur un ouvert

D) normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément, absolument et simplement sur $\mathbb{R}$

Question 18 : La série numérique de terme général a_n, n entier naturel, est

A) divergente car la suite de terme général a_n, n entier naturel, ne tend pas vers 0

B) convergente

C) divergente car pour tout n, entier naturel, $1/(n+1) \leqslant a_n$ et la série de terme général $1/(n+1)$ est une série à termes positifs divergente

D) à termes positifs et la suite de terme général a_n, n entier naturel, tend vers 0

Question 19 : Soit la série numérique de terme général $b_n = (-1)^n a_n$, n entier naturel. On a

A) la série numérique de terme général b_n est absolument convergente donc convergente, car la série de terme général a_n, n entier naturel, est une série à termes positifs convergente

B) la suite (a_n) est positive et décroissante car $0 < (1+t^2)/2 \leqslant 1$ et elle tend vers 0 par application du théorème de convergence dominée puisque $0 < \left((1+t^2)/2\right)^n \leqslant 1$, fonction intégrable sur $[0,1]$

C) la série numérique de terme général b_n n'est pas absolument convergente mais est convergente d'après le critère spécial des séries alternées

D) la série numérique de terme général b_n est divergente car la suite (a_n) de terme ne tend pas vers 0

Question 20 : La série de fonctions de terme général w_n

A) est une série entière de rayon de convergence $R = 1$

B) est une série entière de rayon de convergence R strictement supérieur à 1

C) est une série entière de rayon de convergence R strictement inférieur à 1

D) est une série de Fourier de rayon de convergence égal à 1

Question 21 : x étant fixé dans l'intervalle $]-R, R[$, R désignant le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$, la série de fonctions, de la variable réelle t, de terme général r_n défini par $r_n(t) = \left(x(1+t^2)/2\right)^n$

A) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$

B) est normalement convergente donc uniformément convergente sur $[0,1]$ mais elle n'est pas absolument convergente sur cet intervalle

C) est normalement convergente sur $[0,1]$ car pour tout t appartenant à $[0,1]$ $|r_n(t)| \leqslant |x^n|$, la série de terme général x^n étant absolument convergente sur $\mathbb{R}$

D) est uniformément convergente mais n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$

Question 22 : x étant un réel, la série de fonctions de terme général r_n, définie à la question 21,

A) est intégrable terme à terme sur le segment $[0,1]$, pour tout x fixé dans $]-R, R[$, R désignant le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$

B) n'est pas intégrable terme à terme sur le segment $[0,1]$, pour tout x fixé dans $]-R, R[$, R désignant le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$

C) est intégrable terme à terme sur le segment $[0,1]$, pour tout x appartenant à $]-2,2[$

D) n'est intégrable terme à terme sur le segment $[0,1]$ que pour x appartenant à $[0,1]$

Question 23 : La série de fonctions de terme général r_n, définie à la question 21, a pour somme

A) $1/\left(1 + (x(1+t^2)/2)\right)$ pour tout x appartenant à $]-1,1[$ et pour tout t appartenant à $[0,1]$

B) $1/\left(1 - (x(1+t^2)/2)\right)$ pour tout x appartenant à $]-1,1[$ et pour tout t appartenant à $[0,1]$

C) $1/\left(1 - (x(1+t^2)/2)\right)$ pour tout x appartenant à $]-2,2[$ et pour tout t appartenant à $[0,1]$

D) $1/\left(1 - (x(1+t^2)/2)\right)$ pour tout t appartenant à $[0,1]$ et uniquement pour x appartenant à $[0,1]$

Question 24 : Dans la suite, on note W la somme, si elle existe, de la série de fonctions de terme général w_n. Pour tout x appartenant à $]0,1[$, on a

A) $W(x) = (2/x)\left((x/(2-x))^{1/2}\right) \operatorname{Argth}\left((x/(2-x)^{1/2})\right)$

B) $W(x) = (2/x)\left((x/(2-x))^{1/2}\right) \operatorname{Arctan}\left((x/(2-x)^{1/2})\right)$

C) $W(x) = \left(2\left((x(2-x))^{1/2}\right)\right) \ln\left(\left((2-x)^{1/2} + x^{1/2}\right) / \left((2-x)^{1/2} - x^{1/2}\right)\right)$

D) $W(x) = \left(2\left((x(2-x))^{1/2}\right)\right) \ln\left(\left((2-x)^{1/2} - x^{1/2}\right) / \left((2-x)^{1/2} + x^{1/2}\right)\right)$

Question 25 : Pour tout x appartenant à $]-1,0[$, on a

A) $W(x) = \left(2/((x(2-x))^{1/2})\right) \operatorname{Argth}\left((x/(2-x))^{1/2}\right)$

B) $W(x) = \left(2/((x(x-2))^{1/2})\right) \operatorname{Argth}\left((x/(x-2))^{1/2}\right)$

C) $W(x) = \left(2/((x(x-2))^{1/2})\right) \operatorname{Arctan}\left((x/(x-2))^{1/2}\right)$ et W n'est pas définie en -1

D) $W(x) = \left(2/((x(x-2))^{1/2})\right) \operatorname{Arctan}\left((x/(x-2))^{1/2}\right)$ et $W(-1) = \pi\left(3\sqrt{3}\right)$ car W est continue en -1, la série de terme général w_n convergeant uniformément sur le segment $[-1,0]$

Question 26 : Pour pouvoir écrire $\lim\limits_{x \to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(0)$

A) il suffit que la série converge uniformément sur $]0,+\infty[$

B) il suffit que la série converge uniformément au point $x = 0$

C) il est nécessaire que la série converge simplement au point $x = 0$

D) il est nécessaire que la série converge uniformément sur un intervalle fermé contenant le point 0

Question 27 : On a

A) $\lim\limits_{x \to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \ln(1/2)$

B) $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \ln 2$

C) $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = 1/\ln 2$

D) $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ n'existe pas car la série de terme général $u_n(0)$ est divergente

Question 28 : On a

A) $\lim_{x\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} v_n(x) = 1/2$

B) $\lim_{x\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} v_n(x) = 3/4$

C) $\lim_{x\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} v_n(x) = 3/2$

D) $\lim_{x\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} v_n(x)$ est la différence de somme de la série de terme général $1/(2(n-1))$ et de la somme de la série de terme général $1/(2(n+1))$

Question 29 : La série de fonctions de terme général

A) u_n est dérivable terme à terme sur $[0,+\infty[$ car la série de terme général u_n converge simplement sur $[0,+\infty[$, la série de terme général u_n' est uniformément convergente sur $[0,+\infty[$ et u_n est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$

B) u_n' n'est pas normalement convergente sur $[0,+\infty[$

C) u_n' est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car $|u_n'(x)| \leqslant 1/n^2$ terme général d'une série numérique convergente

D) u_n' est uniformément convergente mais n'est pas normalement convergente sur $[0,+\infty[$

Question 30 : La série de fonctions de terme général

A) v_n' est normalement convergente sur $\mathbb{R}$

B) v_n' n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas absolument convergente sur $\mathbb{R}$

C) v_n' est normalement convergente sur $[0,+\infty[$

D) v_n' converge en moyenne quadratique sur $\mathbb{R}$

PARTIE IV

On considère la fonction f, de la variable réelle t, définie sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ par
$$f(t) = \left(\ln\left(1+xt^2\right)\right) / \left(t(1+t^2)\right),\ x \text{ étant un paramètre réel}$$
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels

Question 31 : La fonction f

A) est définie continue sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel

B) est définie continue sur $]0,+\infty[$ uniquement pour x réel strictement positif

C) n'est pas définie pour x réel strictement négatif car dans ce cas $1+xt^2$ est strictement négatif pour tout t strictement inférieur à $1/\sqrt{(-x)}$

D) est, dans le cas où x est un réel strictement positif, prolongeable par continuité en 0 par 0 car $f(t)$ est équivalente à $xt/(1+t^2)$

Question 32 : La fonction f

A) est positive sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif

B) n'est pas de signe constant sur $]0,+\infty[$ pour x réel positif

C) est équivalente en $+\infty$ à $1/t^2$ pour tout x réel sstrictement positif

D) est, en $+\infty$, telle que $f(t) = o\left(1/t^2\right)$ pour tout x réel strictement positif

Question 33 : La fonction f

A) n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif

B) est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif car toute fonction continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et ayant une limite nulle en $+\infty$, est intégrable sur $]0,+\infty[$

C) n'est intégrable sur $]0,+\infty[$ que pour x réel strictement positif

D) est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif car la fonction f est positive, continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et majorée en $+\infty$ par $1/t^2$, fonction intégrable sur $]0,+\infty[$

Question 34 : La fonction f

A) est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout x réel positif car elle est intégrable sur $[0,+\infty[$ et impaire pour tout x réel positif

B) n'est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour aucun x réel car elle n'est pas définie en 0

C) est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout x réel car elle est intégrable sur $[0,+\infty[$ et impaire pour tout x réel

D) est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout x réel positif car toute fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$ est intégrable sur $[-\infty,+\infty[$

Question 35 : On note F la fonction qui au couple (x,t) associe $\left(\ln\left(1+xt^2\right)\right)/\left(t(1+t^2)\right)$. On a

A) $F(x,t) = \phi(xt^2).\left(xt/(1+t^2)\right)$ pour tout couple (x,t) appartenant à $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ où $\phi(u) = \left(\ln\left(1-u\right)\right)/u$ pour tout u appartenant à $]1,+\infty[$

B) $F(x,t) = \phi(xt^2).\left(xt/(1+t^2)\right)$ pour tout couple (x,t) appartenant à $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ où $\phi(u) = \left(\ln\left(1+u\right)\right)/u$ pour tout u appartenant à $]-1,+\infty[$

C) la fonction ψ définie sur $]-1,+\infty[$ par $\psi(u) = \left(\ln\left(1+u\right)\right)/u$ pour u non nul et $\psi(0) = 1$ est développable en série entière au voisinage de 0 donc C^∞ sur $]-1,1[$

D) F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ comme produit de 2 fonctions de classe C^1

Question 36 : On note D_1F, respectivement D_2F, la dérivée partielle de F par rapport à x, respectivement par rapport à t. On a

A) $D_1F(x,t) = t/\left((1+xt^2)(1+t^2)\right)$

B) $D_2F(x,t) = t/\left((1+xt^2)(1+t^2)\right)$

C) $D_1F(x,t) = 1/\left((1+xt^2)(1+t^2)t\right)$

D) $D_2F(x,t) = \left[2xt^2(1+t^2) - \left(\ln\left(1+xt^2\right)\right)(1+3t^2)(1+xt^2)\right]/(t^2(1+t^2)^2)$

Question 37 : On a

A) D_1F est continue sur $\mathbb{R}^2$

B) D_1F est continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$

C) D_1F est continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$

D) D_1F est continue uniquement sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$

Question 38 : La fonction $|f|$

A) est, pour tout x réel positif, majorée sur $]0,+\infty[$ par une fonction positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$

B) est, pour tout x réel , majorée sur $]0,+\infty[$ par une fonction positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$

C) ne peut, pour tout x réel positif, être majorée sur $]0,+\infty[$ par une fonction positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$

D) est, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-A,A]$ avec A strictement positif, majorée sur $]0,+\infty[$ par une fonction positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$

Question 39 : La fonction g définie, si elle existe, par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est

A) continue sur $\mathbb{R}$

B) continue sur $[0,+\infty[$

C) continue sur $[0,A]$, pour tout A strictement positif, mais n'est pas continue sur $[0,+\infty[$

D) continue uniquement sur $]0,+\infty[$

Question 40 : La fonction g définie dans la question 39 vérifie

A) g est dérivable uniquement sur $]0,+\infty[$ car la fonction $|D_1F|$ ne peut être dominée sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par une fonction positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ que pour x appartenant à un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$

B) g est dérivable sur $[0,+\infty[$

C) $g'(x) = (\ln x)/(2(1-x))$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$ différent de 1 et $g'(1) = -1/2$

D) $g'(x) = (\ln x)/(2(x-1))$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$ différent de 1 et $g'(1) = 1/2$