

ESPACES VECTORIELS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions

Déf 1:

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une loi de composition interne sur E , telle que $(E, +)$ soit un *groupe abélien*, c'est-à-dire :
 - (i) la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2, x + y \in E$ (loi interne);
 - (ii) la loi $+$ est *associative* : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$;
 - (iii) la loi $+$ est *commutative* : $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$;
 - (iv) la loi $+$ possède un *élément neutre*, noté 0_E : $\forall x \in E, x + 0_E = x$;
 - (v) tout élément x de E possède un *symétrique* pour la loi $+$, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.
- $\cdot$ une loi de composition externe de domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application

$$\begin{cases} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda.x \end{cases}$$
 vérifiant les propriétés suivantes : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2$,
 - (i) $1_{\mathbb{K}}.x = x$;
 - (ii) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$;
 - (iii) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;
 - (iv) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.

Les éléments du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E sont appelés les vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Conséquences: si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, alors :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$.
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$.

 **Démonstration:**

1. - Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ alors $\lambda.x = 0_E$ (faire $\mu = 0$ dans (iii)); si $x = 0_E$ alors $\lambda.x = 0_E$ (faire $y = 0$ dans (ii)).
 - Si $\lambda.x = 0_E$: soit $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, sinon $x = \frac{1}{\lambda}.(\lambda.x)$ d'après (iv) et (i), d'où $x = 0_E$ d'après ce qui a été fait avant.
2. - On montre déjà que, pour tout scalaire λ : $(-\lambda).x = -(\lambda.x)$; en effet, d'après (iii), $(\lambda + (-\lambda)).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ d'où $0_E = \lambda.x + (-\lambda).x$ ce qui prouve que $(-\lambda).x$ est le symétrique de $\lambda.x$ pour la loi $+$, c'est-à-dire est égal à $-\lambda.x$.
 - D'où : $(\lambda - \mu).x = (\lambda + (-\mu)).x = \lambda.x + (-\mu).x = \lambda.x + (-\mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
3. - On commence par montrer que $\lambda.(-x) = -\lambda.x$: en effet, d'après le résultat précédent on a $(-1).x = -x$ d'où d'après (iv), $\lambda.(-x) = \lambda.((-1).x) = ((-1)\lambda).x = (-\lambda).x = -\lambda.x$.
 - D'où $\lambda.(x - y) = \lambda.(x + (-y)) = \lambda.x + \lambda.(-y) = \lambda.x - \lambda.y$.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles.
3. Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D, E)$ (noté aussi E^D) des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois :

$$\begin{cases} (f, g) \longmapsto f + g & \text{avec : } \forall x \in D, (f + g)(x) = f(x) +_E g(x) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda.f & \text{avec : } (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{cases}$$

Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle de D dans E , qui à tout élément $x \in D$ associe le vecteur 0_E .

4. En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}(\mathbb{N}, E)$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois ainsi définies : si u et v sont deux suites à valeurs dans E et λ un scalaire :

- $u + v$ est la suite donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n$;
- $\lambda.u$ est la suite donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda.u)_n = \lambda.u_n$.

Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la suite nulle, c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0_E$.

5. $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
6. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Prop 1:

Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$ p $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Alors l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois définies par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} :$$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_p) + (y_1, y_2, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p) \\ \lambda.(x_1, x_2, \dots, x_p) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_p) \end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i .

Rem : Le vecteur nul de E est le p -uplet $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_p})$.

Démonstration:

On vérifie déjà que $(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p, +)$ est un groupe abélien (groupe produit) ; il suffit d'écrire...

Par exemple, la commutativité de la loi $+$ dans $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ découle de celle dans les E_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall (x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p, \\ (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \quad (\text{définition de la loi } + \text{ dans } E) \\ &= (y_1 + x_1, \dots, y_p + x_p) \quad (\text{car chaque loi } + \text{ est commutative dans chaque } E_i) \\ &= (y_1, \dots, y_p) + (x_1, \dots, x_p) \quad (\text{définition de la loi } + \text{ dans } E) \end{aligned}$$

Les propriétés de la loi externe se vérifient elles aussi aisément par le calcul :

Par exemple, pour la propriété (ii), si $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$ sont dans $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned} \lambda.(x + y) &= \lambda.(x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) = (\lambda.(x_1 + y_1), \dots, \lambda.(x_p + y_p)) \quad (\text{définition des lois dans } E) \\ &= (\lambda.x_1 + \lambda.y_1, \dots, \lambda.x_p + \lambda.y_p) \quad (\text{car les } E_i \text{ sont des e.v}) \\ &= (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_p) + (\lambda.y_1, \dots, \lambda.y_p) = \lambda.x + \lambda.y \quad (\text{définition des lois dans } E) \end{aligned}$$

Exemple

$\mathbb{K}^p$ (ensemble des p -uplets de scalaires) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois définies ci-dessus.

II. Sous-espace vectoriel

Déf 2:

 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, \cdot)$ est encore un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Rem: Cette définition implique, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$ (on dit aussi que F est stable par la loi $+$) ;
- que le vecteur nul, 0_E , appartient à F (car $(F, +)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi $\cdot$ est une loi de composition externe sur F , donc : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda.x \in F$ (on dit aussi que F est stable par la loi $\cdot$).

Théorème 1:

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- (i) $F \subset E$;
- (ii) $F \neq \emptyset$;
- (iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

 *Démonstration:*

La propriété (iii) avec $\lambda = \mu = 1$ implique déjà que la loi $+$ est interne dans F .

La propriété (iii) avec $\lambda = -1$ et $\mu = 0$ implique que, si x appartient à F , il en est de même de $-x$.

La propriété (ii) et la propriété (iii) avec $\lambda = 1, \mu = -1$ impliquent que 0_E appartient à F ; ce sera alors forcément l'élément neutre de $(F, +)$, et on en déduit que $(F, +)$ est un groupe abélien.

La propriété (iii) avec $\mu = 0$ implique que F est stable par la loi $\cdot$, donc la loi $\cdot$ est bien une loi de composition externe sur F ; quant aux quatre propriétés de cette loi, puisqu'elles sont vraies dans E , elles le sont a fortiori dans F , donc $(F, +, \cdot)$ est bien un espace vectoriel.

Remarques

- On peut remplacer la condition (ii) par : $0_E \in F$.
C'est ce que l'on fait généralement puisque, si F est un sous-espace vectoriel de E , alors nécessairement il contient 0_E .
- On peut remplacer la condition (iii) par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F, \quad \lambda x + y \in F$$

ou par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F, \quad x + y \in F \text{ et } \lambda x \in F$$

Rem: Si F est un sous-espace vectoriel de E , il est alors facile de démontrer par récurrence que F est stable par combinaisons linéaires c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in F.$$

Exemples

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
- Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n , est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
Attention : L'ensemble des polynômes de degré *exactement* n n'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Prop 2:

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E , leur intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E .

 *Démonstration:* (A)

Notons $F = \bigcap_{i \in I} E_i$.

- $F \neq \emptyset$: en effet, pour tout $i \in I$, $0_E \in E_i$ donc $0_E \in F$.
- Si $x, y \in F$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x, y \in E_i$ pour tout $i \in I$ donc $\lambda x + y \in E_i$ car E_i sous-espace vectoriel de E , donc finalement $\lambda x + y \in F$.

Prop 3:

Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X ;

On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par X , et on le note $\text{Vect}(X)$.

Remarques

1. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
2. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(F) = F$.



Rem : La **réunion** de sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E .

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, la *réunion* F des deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ puisque, par exemple, $(1, 0) + (0, 1)$ n'appartient pas à F .

Plus précisément, on peut démontrer le résultat suivant :

Prop 4:

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Démonstration:

L'implication $\Leftarrow$ est immédiate.

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E , tels que $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel. On raisonne par l'absurde : la négation de la proposition « $A \subset B$ ou $B \subset A$ » est « $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$ » c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tq $a \notin B$ et $b \in B$ tq $b \notin A$.

Alors $a + b \in A \cup B$ puisque $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel, donc $a + b \in A$ ou $a + b \in B$.

Si, par exemple, $a + b \in A$, on aurait $b = (a + b) - a \in A$ puisque A est un sous-espace vectoriel, d'où la contradiction.

III. Combinaisons linéaires**Déf 3:**

Une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite à support fini si et seulement si l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est fini (on dit aussi que les λ_i sont presque tous nuls).

On dit de même qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est à support fini si l'ensemble $\{i \in I \mid x_i \neq 0_E\}$ est fini.

Déf 4:

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de cette famille s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini telle que :

$$x = \sum_{\substack{i \in I \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i x_i.$$

On note alors simplement $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ (somme en fait finie).

Rem : dans le cas d'une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs, x est combinaison linéaire de cette famille si et seulement si il s'écrit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Théorème 2:

Soit $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Alors $\text{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X .

 Démonstration:

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

- F est bien un sous-espace vectoriel de E : en effet, F est non vide (puisque $X \neq \emptyset$), et on vérifie facilement que, si x et y sont deux éléments de F et si λ appartient à $\mathbb{K}$, alors $\lambda x + y$ appartient encore à F (une combinaison linéaire de deux combinaisons linéaires d'éléments de X est encore une combinaison linéaire d'éléments de X). De plus, F contient évidemment X .
- Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant X , il contient $\lambda_i x_i$ pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in X$, donc il contient F .
- F est donc bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X .

Rem: Ce théorème prouve, en particulier, que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E .

Ce résultat est utile pour abréger certaines démonstrations (voir derniers exemples ci-dessous).

Exemples

1. Soit $x \in E$. Alors $\text{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Si $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ s'appelle la droite vectorielle engendrée par x .

2. Dans $\mathbb{K}[X] : \mathbb{K}[X] = \text{Vect}((X^i)_{i \in \mathbb{N}})$ et $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}((X^i)_{0 \leq i \leq n})$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On peut dire sans calcul que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car on remarque qu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est donc le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\{I, J\})$.

4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel.

En effet, $u = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1).$$

F est donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$.

IV. Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels**Déf 5:**

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

On appelle somme des E_i , notée $\sum_{i=1}^n E_i$, l'ensemble des vecteurs x de E qui peuvent s'écrire d'une façon sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \left\{ x \in E \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i \text{ tq } x = \sum_{i=1}^n x_i \right\}.$$

Théorème 3:

1. $\sum_{i=1}^n E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^n E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^n E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :

$$\sum_{i=1}^n E_i = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right).$$

 Démonstration:

Soit $F = \sum_{i=1}^n E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^n x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E . En effet, 0_E appartient à E_i pour tout i donc appartient à F , et, si $x = \sum_{i=1}^n x_i \in F$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i \in F$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i , alors $\lambda x + y = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)$ appartient à F puisque $\lambda x_i + y_i \in E_i$ pour tout i (les E_i sont des sous-espaces vectoriels).
2. F est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^n E_i$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par cette réunion, car :
 - F contient bien tous les E_i , car $x_i \in E_i$ peut s'écrire $x_i = 0 + \dots + 0 + x_i + 0 + \dots + 0$. Il contient donc leur réunion.
 - F est bien un sous-espace vectoriel de E comme on l'a vu dans le 1er point.
 - Enfin, si un sous-espace vectoriel G de E contient la réunion des E_i , puisqu'il est stable par $+$, il contiendra F .

Rem: Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n vecteurs de E . Alors $\text{Vect}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{K} \cdot x_i$.

 Démonstration:

En effet, on a vu que $\text{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ où les λ_i décrivent $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^n y_i$ où les y_i décrivent $\mathbb{K} \cdot x_i$.

Rem: Dans le cas d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E (pas nécessairement finie), $\sum_{i \in I} E_i$ désigne l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i \in I} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$ et où la famille (x_i) est à support fini (c'est-à-dire que les x_i sont tous nuls sauf un nombre fini).

Déf 6:

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E .

On dit que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe si :

pour tout $x \in \sum_{i=1}^n E_i$, il existe une *unique* famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n E_i$ telle que $x = \sum_{i=1}^n x_i$.

On note alors : $\bigoplus_{i=1}^n E_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^n E_i$.

Exemple

$$\mathbb{K}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{K} \cdot X^i$$

Rem: Dans le cas d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E , on dit que la somme $\sum_{i \in I} E_i$ est *directe* si tout élément x de cette somme s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i \in I} x_i$ où, pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$ et où la famille (x_i) est à support fini.

Par exemple, on peut écrire : $\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K} \cdot X^n$.

Théorème 4: caractérisation d'une somme directe

Pour que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n E_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = 0.$$

 Démonstration:

– Supposons la somme directe, et soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n E_i$ telle que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Puisque $0 = 0_{E_1} + 0_{E_2} + \dots + 0_{E_n}$, l'unicité de l'écriture implique $x_i = 0$ pour tout i .

- Réciproquement, si la propriété de l'énoncé est vérifiée et si un vecteur $x \in \sum_{i=1}^n E_i$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i , alors $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = 0$ avec $x_i - y_i \in E_i$ pour tout i (car E_i sous-espace vectoriel), ce qui implique $x_i - y_i = 0$ soit $x_i = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Il y a donc bien unicité de la décomposition, et la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe.

Prop 5:

Pour que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E soient en somme directe, il faut et il suffit que :
 $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

 **Démonstration:**

- Si la somme $E_1 + E_2$ est directe, alors, si $x \in E_1 \cap E_2$, on a $0 = x + (-x)$ avec $x \in E_1$ et $-x \in E_2$ d'où $x = 0$ par le théorème précédent, soit $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
- Réciproquement, supposons $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, et soient $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x_1 + x_2 = 0$. Alors $x_1 = -x_2 \in E_1 \cap E_2$ d'où $x_1 = x_2 = 0$, ce qui prouve par le théorème précédent que la somme $E_1 + E_2$ est directe.



Rem : Cela ne se généralise pas à plus de deux sous-espaces vectoriels.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base (e_1, e_2) , soient $F = \mathbb{R}e_1$, $G = \mathbb{R}e_2$ et $H = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$: on a bien $F \cap G \cap H = \{0\}$ mais la somme $F + G + H$ n'est PAS directe (le vecteur $e_1 + e_2$, par exemple, peut se décomposer de plusieurs façons différentes).

Prop 6: « Associativité » de la somme directe

Pour que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

il existe/pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} E_i$ est directe et $\sum_{1 \leq i \leq n} E_i$ et E_j sont en somme directe.

 **Démonstration:**

- Supposons que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe, et soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
 - La somme $\sum_{i \neq j} E_i$ est directe, car si $\sum_{i \neq j} x_i = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \neq j$, alors $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ en posant $x_j = 0$, d'où $x_i = 0$ pour tout i .
 - Montrons que la somme $E_j + \left(\sum_{i \neq j} E_i \right)$ est directe.

Si $x_j + y = 0$ avec $x_j \in E_j$ et $y \in \sum_{i \neq j} E_i$, alors on peut écrire $y = \sum_{i \neq j} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \neq j$, d'où $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ d'où $x_i = 0$ pour tout i , donc $x_j = y = 0$.
- Réciproquement, s'il existe $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ telle que la condition de l'énoncé soit vérifiée, montrons que $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe : si l'on a $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i , alors $x_j + y = 0$ en posant $y = \sum_{i \neq j} x_i$, donc $x_j = y = 0$ puisque $E_j + \left(\sum_{i \neq j} E_i \right)$ est directe, puis $y = \sum_{i \neq j} x_i = 0$ implique $x_i = 0$ pour tout $i \neq j$ puisque la somme $\sum_{i \neq j} E_i$ est directe. Finalement, on a bien $x_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Déf 7:

n sous-espaces vectoriels $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E sont dits supplémentaires si $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

Cela équivaut à :

$$\forall x \in E, \exists ! (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n E_i \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

 **Démonstration:**

- On vérifie d'abord facilement qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Il est également immédiat que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$: si f est à la fois paire et impaire, c'est l'application nulle.
- Enfin, pour toute application f on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

donc en posant $g : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, on aura g paire, h impaire et $f = g + h$ ce qui prouve que $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

Rem : on peut aussi procéder par analyse-synthèse, ce qui a l'avantage de démontrer en même temps unicité et existence de la décomposition. Voir en classe.

2. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, tel que $\deg(A) = n + 1, n \in \mathbb{N}$.

Alors $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]A$ (ensemble des multiples de A) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

 **Démonstration:**

- On vérifie facilement qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.
- D'après le résultat du cours sur la division euclidienne, tout polynôme P s'écrit de manière unique sous la forme $P = AQ + R$ avec $AQ \in \mathbb{K}[X]A$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$, ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité de la décomposition.

V. Familles génératrices, libres, liées

Déf 8:

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est dite génératrice de E si $\text{Vect}((x_i)_{i \in I}) = E$.

Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i , ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}x_i$.

Prop 7:

Si $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de E , toute famille contenant les (x_i) (sur-famille) est encore une famille génératrice de E .

 **Démonstration:**

Soit $(x_i)_{i \in I \cup J}$ une famille contenant la précédente. Par hypothèse, tout vecteur $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ avec les λ_i presque tous nuls, donc s'écrit aussi $x = \sum_{i \in I \cup J} \lambda_i x_i$ en ayant posé $\lambda_i = 0$ lorsque $i \in J$.

Cela montre que la famille $(x_i)_{i \in I \cup J}$ est encore génératrice de E .

Plus rapidement : par définition du sous-espace vectoriel engendré, il est clair que, si A et B sont deux parties de E :

$$A \subset B \implies \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$$

donc si A engendre E , on a $\text{Vect}(A) = E$ puis si B contient A on en déduit $\text{Vect}(B) \supset E$ soit $\text{Vect}(B) = E$ donc B engendre E .

Prop 8:

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E et $i_0 \in I$.

Alors : $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est encore une famille génératrice de E si et seulement si x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \neq i_0}$.

 **Démonstration:**

- Si $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est génératrice, alors x_{i_0} est évidemment combinaison linéaire de cette famille!
- Réciproquement, supposons $(x_i)_{i \in I}$ génératrice et x_{i_0} combinaison linéaire des $(x_i)_{i \neq i_0}$. Alors tout $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ (somme finie) donc $x = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i x_i + \lambda_{i_0} x_{i_0}$ sera encore combinaison linéaire des $(x_i)_{i \neq i_0}$.

Déf 9:

1. Une famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est dite libre si, pour toute famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}.$$

(on dit aussi que les (x_i) sont linéairement indépendants).

2. Une famille quelconque $(x_i)_{i \in I}$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est dite libre si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Cela équivaut à dire que, pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini, la relation $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$ implique $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$ pour tout i .

3. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est dite liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, non tous nuls, telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$.

(on dit aussi que les (x_i) sont linéairement dépendants).

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

 **Solution:**

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ avec λ_i n réels distincts, est libre.

Les λ_i étant distincts, on peut supposer $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Supposons alors qu'il existe des réels α_i tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{\lambda_i} = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E , c'est-à-dire l'application nulle) c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{i=1}^n \alpha_i t^{\lambda_i} = 0$$

puis en divisant par $t^{\lambda_n} (\neq 0)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t^{\lambda_i - \lambda_n} + \alpha_n = 0$$

En faisant alors tendre t vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient (puisque $\lambda_i - \lambda_n < 0$), $\alpha_n = 0$.

Il suffit alors d'itérer le procédé (= faire une récurrence) pour démontrer que tous les α_i sont nuls, ce qui prouve la propriété énoncée.

2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.
Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

 **Solution:**

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre, et puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir propriétés ci-dessous), il suffit en fait de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est libre. Pour cela, procédons par récurrence sur n .

- Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisqu'une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Supposons la propriété démontrée à l'ordre $n - 1$, c'est-à-dire $(e_0, \dots, e_{n-1})$ libre.

Si $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont des réels tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k e_k = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E , c'est-à-dire l'application nulle) alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(kt) = 0 \quad (1)$$

d'où en dérivant 2 fois :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n k^2 \alpha_k \cos(kt) = 0 \quad (2)$$

En calculant alors $n^2 \times (1) - (2)$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} (n^2 - k^2) \alpha_k \cos(kt) = 0$$

d'où l'on tire, compte tenu de l'hypothèse de récurrence :

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, (n^2 - k^2) \alpha_k = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha_k = 0.$$

La relation (1) implique alors aussi $\alpha_n = 0$. Les α_k sont donc tous nuls, ce qui démontre la propriété à l'ordre n et achève la récurrence.

Résultat important, qui peut être utilisé directement.

3. Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

 **Solution:**

Il suffit de le démontrer pour une famille finie.

Soit donc $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés distincts. Quitte à changer l'ordre, on peut supposer $\deg P_1 < \deg P_2 < \dots < \deg P_n$.

Si on a alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = 0$, on a nécessairement $\lambda_n = 0$ car sinon, $\deg\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right) = \deg(\lambda_n P_n) = \deg(P_n) \neq -\infty$.

D'où $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i P_i = 0$, et on recommence... (=récurrence finie).

Ainsi, tous les λ_i sont nuls.

Propriétés:

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si il existe $j \in I$ tel que x_j soit combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I, i \neq j}$.
Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.
7. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs *non nuls* de E . Alors cette famille est libre si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^n \mathbb{K}x_i$ est directe.

 **Démonstration:**

6. – Si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée, il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, non tous nuls, telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$.
Il existe un $\lambda_j \neq 0$ d'où : $x_j = -\sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i$, et x_j est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I, i \neq j}$.
– Réciproquement, s'il existe $j \in I$ tel que x_j est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \neq j}$, on a $x_j = \sum_{i \neq j} \mu_i x_i$ où la famille $(\mu_i)_{i \neq j}$ est à support fini, donc on a la combinaison linéaire non triviale $x_j - \sum_{i \neq j} \mu_i x_i = 0$, et la famille est liée.
7. En effet, si la somme $\sum_{i=1}^n \mathbb{K}x_i$ est directe et si l'on a des scalaires λ_i tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$, alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_i x_i = 0$ par caractérisation d'une somme directe (théorème 4) donc tous les λ_i sont nuls puisque l'on a supposé les x_i non nuls. Réciproque similaire.

Prop 9:

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille *libre* d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i , de manière unique.

 **Démonstration:**

Dire que la famille $\{y\} \cup \{x_i, i \in I\}$ est liée signifie :

Il existe une famille $\{\mu\} \cup \{\lambda_i, i \in I\}$ à support fini de scalaires non tous nuls tq $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i + \mu y = 0$

On ne peut pas avoir $\mu = 0$, sinon on aurait $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ d'où $\lambda_i = 0$ pour tout i , puisque $(x_i)_{i \in I}$ est libre, ce qui contredit l'hypothèse que les scalaires ne sont pas tous nuls.

On a donc $y = -\frac{1}{\mu} \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, et y est bien combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$.

Cette écriture est unique, puisque $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$ implique $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$ d'où $\lambda_i = \mu_i$ pour tout i puisque la famille est libre.

Corollaire 9.1:

Une famille de deux éléments $\{x_1, x_2\}$ dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est liée si et seulement si :
 $x_1 = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x_2 = \lambda x_1$.

 Démonstration:

- Supposons la condition de l'énoncé réalisée.
Alors si $x_1 = 0_E$, la famille $\{x_1, x_2\}$ est évidemment liée, et si $x_2 = \lambda x_1$ alors $1.x_2 - \lambda.x_1 = 0_E$ donc il existe une combinaison linéaire non triviale de x_1 et x_2 qui est égale à 0_E , donc $\{x_1, x_2\}$ est liée.
- La réciproque est un cas particulier de la proposition précédente, puisque lorsque $x_1 \neq 0_E$, la famille $\{x_1\}$ est libre.

VI. Bases

Déf 10:

Une famille d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est appelée base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5:

Pour une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{B}$ est une base de E .
- Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

 Démonstration:

- (a) $\implies$ (b) : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E .
 - $\mathcal{B}$ étant génératrice, tout vecteur de E s'écrit bien comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.
 - et cette écriture est unique, car $\sum \lambda_i e_i = \sum \mu_i e_i \implies \sum (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0 \implies \lambda_i - \mu_i = 0$ pour tout i .
- (b) $\implies$ (a) Si (b) est vérifiée, $\mathcal{B}$ est génératrice, et elle est libre car $0 = \sum \lambda_i e_i \implies \sum 0 \cdot e_i = \sum \lambda_i e_i \implies 0 = \lambda_i$ pour tout i , par unicité.

Rem: Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de vecteurs *non nuls* de E , cette famille est une base de E si et seulement si $E = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}e_i$.

Déf 11:

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Alors, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, telle que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$.

Les x_i sont appelés les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Les vecteurs $x_i e_i$ sont appelés les composantes de x dans cette base.

Exemples

- Une base de $\{0\}$ est $\emptyset$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\text{Vect}(\{\emptyset\}) = \{0\}$).
 - Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $\dots$, $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.
 - Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.
 - Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: elle est formée des vecteurs $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}, X^n$.
 - Il y a d'autres bases très utiles dans $\mathbb{K}_n[X]$:
 - Pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille des polynômes $(X - a)^k$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Cette famille peut être par exemple utilisée pour la démonstration de la formule de Taylor.
 - La famille des polynômes de Hilbert (ou de Newton) : ce sont les polynômes H_k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ définis par : $H_0 = 1$ et pour $k \geq 1$, $H_k = \frac{X(X-1) \dots (X-k+1)}{k!}$.
- (Le fait qu'il s'agit bien de bases de $\mathbb{K}_n[X]$ sera démontré un peu plus tard).

Théorème 6: bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.
Si, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i , alors les $\mathcal{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ est une base de E .
2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E , et $(\mathcal{B}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de $\mathcal{B}$.
Si, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

 Démonstration:

Pour simplifier l'écriture, on se contentera de traiter le cas $n = 2$ (il suffirait ensuite de faire une simple récurrence sur n , compte tenu de l'associativité de la somme directe).

1. Supposons donc $E = E_1 \oplus E_2$, et soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i ($i = 1, 2$).
 - Si $x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, alors $x \in E_1 \cap E_2$ d'où $x = 0$. Mais 0 ne peut appartenir à une base, donc $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.
 - Si $x \in E$, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$. Or, pour $i = 1, 2$, x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_i$, donc x s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est génératrice de E .
 - Posons $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{i \in I_1}$ et $\mathcal{B}_2 = (e_i)_{i \in I_2}$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, de sorte que $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I_1 \cup I_2}$. Il reste à démontrer que $\mathcal{B}$ est libre.
Or, si on a $\sum_{i \in I_1 \cup I_2} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{i \in I_1} \lambda_i e_i = - \sum_{i \in I_2} \lambda_i e_i \in E_1 \cap E_2$, donc $\sum_{i \in I_1} \lambda_i e_i = 0$ puis $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I_1$ puisque $\mathcal{B}_1$ est libre, et, de même, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I_2$.
2. On reprend les hypothèses et notations de l'énoncé, avec $i \in \{1, 2\}$. Posons encore $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{i \in I_1}$ et $\mathcal{B}_2 = (e_i)_{i \in I_2}$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, de sorte que $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I_1 \cup I_2}$.
 - $\mathcal{B}$ étant une base de E , tout vecteur x de E s'écrit

$$x = \sum_{i \in I_1 \cup I_2} \lambda_i e_i = \underbrace{\sum_{i \in I_1} \lambda_i e_i}_{=x_1} + \underbrace{\sum_{i \in I_2} \lambda_i e_i}_{=x_2}$$
 avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, d'où $E = E_1 + E_2$.
 - Si $x \in E_1 \cap E_2$, il existe des scalaires λ_i, μ_i tels que $x = \sum_{i \in I_1} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I_2} \mu_i e_i$, d'où $\sum_{i \in I_1 \cup I_2} v_i e_i = 0$ avec $v_i = \lambda_i$ pour $i \in I_1$ et $v_i = -\mu_i$ pour $i \in I_2$.
 $\mathcal{B}$ étant libre, on en déduit $v_i = 0$ pour tout i , d'où $x = 0$. Ainsi, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Déf 12:

 On dit que $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ est une famille de bases adaptée à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

VII. Espaces vectoriels de dimension finie**Déf 13:**

 On dit qu'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Prop 10:

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice de E , on peut extraire une famille génératrice finie.

 Démonstration:

Par hypothèse, E est engendré par une famille finie : $E = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une partie génératrice de E . Tout y_j peut donc s'écrire comme combinaison linéaire (finie) des vecteurs de cette famille :

$$y_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_{ji} x_i \quad \text{où } I_j \text{ est une partie finie de } I$$

donc les y_j appartiennent tous à $\text{Vect}(\{x_i, i \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n\})$.

E étant engendré par les y_j est donc aussi engendré par $\{x_i, i \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n\}$, qui est bien une famille finie extraite de $(x_i)_{i \in I}$.

Théorème 7:

Si E est engendré par une famille de cardinal n , toute famille possédant au moins $n + 1$ vecteurs est liée.

(ou : toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n).

Démonstration:

Supposons $E = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Procédons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $E = \text{Vect}(y)$ et, si $x_1, x_2 \in E$, il existe λ_1, λ_2 tels que $x_1 = \lambda_1 y$ et $x_2 = \lambda_2 y$, d'où $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$ et $\{x_1, x_2\}$ est liée (traiter à part le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n - 1$, et soit $E = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$, et $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$. Il existe des scalaires λ_{ij} tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, x_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j \quad (*)$$

- Si tous les λ_{ij} sont nuls, alors tous les x_i sont nuls, et la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée!
- Sinon, il existe au moins un des λ_{ij} qui est non nul, par exemple λ_{11} (pour simplifier les notations). On utilise alors la méthode du pivot :

Dans le système $(*)$, on effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} L_1$ pour $i \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$. On obtient :

$$\forall i \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket, x_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1 = \sum_{j=2}^n \left(\lambda_{ij} - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} \lambda_{1j} \right) y_j$$

Ainsi, les vecteurs $x_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1$ pour $i \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$ forment-ils un système de n vecteurs de $\text{Vect}(\underbrace{y_2, \dots, y_n}_{n-1 \text{ vecteurs}})$. D'après

l'hypothèse de récurrence, ils sont liés. Il existe donc des scalaires $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \left(x_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1 \right) = 0$$

et, en développant cette expression, on obtient une combinaison linéaire des $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ qui vaut 0 et à coefficients non tous nuls, donc la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée, ce qui achève la récurrence.

Théorème 8: de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E .

Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Démonstration:

- $\mathcal{L}$ est de cardinal fini d'après le th. précédent.
- On considère alors l'ensemble X de toutes les familles libres B telles que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.
 - $X \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{L} \in X$.
 - Si E est engendré par n vecteurs, les éléments de X sont tous de cardinal $\leq n$ d'après le th. précédent. L'ensemble des cardinaux des éléments de X est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus grand élément, c'est-à-dire qu'il existe dans X un élément de cardinal maximum. Notons $\mathcal{B}$ un tel élément, et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E .
 - $\mathcal{B}$ est libre par construction : $\mathcal{B} \in X$.
 - Soit $x \in \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ et $x \notin \mathcal{B}$. Alors $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \cup \{x\} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, et, puisque $\text{card}(\mathcal{B} \cup \{x\}) > \text{card}(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est liée. Il en résulte que $x \in \text{Vect}(\mathcal{B})$. Cela reste évidemment vrai si $x \in \mathcal{B}$, donc, finalement, tout vecteur x de $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ appartient à $\text{Vect}(\mathcal{B})$. Donc $\underbrace{\text{Vect}(\mathcal{L} \cup \mathcal{G})}_{=E, \text{ car } \mathcal{G} \text{ gén.}} \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$, puis $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$: $\mathcal{B}$ est génératrice de E .

Corollaire 8.1:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E .

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

 Démonstration:

| prendre $\mathcal{G} = E$ dans le théorème précédent.

Corollaire 8.2:

| Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. De toute système générateur de E , on peut extraire une base.

 Démonstration:

| prendre $\mathcal{L} = \emptyset$ dans le théorème précédent.

Corollaire 8.3:

| Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie possède une base.
(Rem : si $E = \{0_E\}$, une base de E est $\{\emptyset\}$).

Théorème 9: de la dimension

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

 Démonstration:

| Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . En utilisant le théorème 7, on a

- $\mathcal{B}'$ génératrice et $\mathcal{B}$ libre $\implies \text{card}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{B}')$
- $\mathcal{B}$ génératrice et $\mathcal{B}'$ libre $\implies \text{card}(\mathcal{B}') \leq \text{card}(\mathcal{B})$

Déf 14:

Le nombre d'éléments commun à toutes les bases de E s'appelle la dimension de E , notée $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$.

Exemples

1. $\dim(\{0\}) = 0$
2. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
3. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
4. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$
5. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$

Théorème 10:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments; et si elle en a exactement n , c'est une base de E .
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments; et si elle en a exactement n , c'est une base de E .

 Démonstration:

1. Soit L une famille libre de E .
 - $\text{card}(L) \leq n$ a déjà été fait.
 - Si $\text{card}(L) = n$ et si $x \notin L$, $\text{card}(L \cup \{x\}) = n + 1$ donc $L \cup \{x\}$ est liée donc x est combinaison linéaire des vecteurs de L . Cette propriété reste évidemment vraie si $x \in L$, et finalement L engendre E : L est une famille génératrice, c'est donc une base de E .
2. Soit G une famille génératrice de E .
 - D'après un résultat précédent, on peut extraire de G une base. Comme toutes les bases de E sont de cardinal n , on a $\text{card}(G) \geq n$.
 - Si G a exactement n éléments et si $x \in G$, alors $G \setminus \{x\}$ n'est pas génératrice (car de cardinal $< n$). x ne peut donc pas être combinaison linéaire des éléments de $G \setminus \{x\}$ d'après la proposition 8. G est donc aussi une famille libre (aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres) et c'est une base.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Plus généralement, si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n , c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.
3. Toute famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

 **Démonstration:**

1. En effet une telle famille est libre (déjà vu), et elle est formée de $n + 1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $n + 1$.
2. Ce résultat n'est pas si immédiat et **sa démonstration doit être connue**.

Si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n , elle est libre (déjà vu). De plus, d'après le résultat précédent, pour tout entier n , la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Donc si P est un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$, puisqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{K}_n[X]$, P sera combinaison linéaire des $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$, donc la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$ et finalement c'en est une base.

3. Rappelons que la *valuation* d'un polynôme P non nul, notée $\text{val}(P)$, est le plus grand entier i tel que X^i divise P (autrement dit, c'est le degré du terme de plus bas degré de P , ou encore l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P). Lorsque $P = 0$ on pose $\text{val}(0) = +\infty$.

Soient donc $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes tels que $\text{val}(P_k) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Il y a $n + 1$ polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n + 1$ donc pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soient donc $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$.

En évaluant ce polynôme en 0 on obtient $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(0) = 0$, et puisque $P_k(0) = 0$ si $k \geq 1$ (les P_k pour $k \geq 1$ sont de valuations ≥ 1 donc divisibles par X) et puisque $P_0(0) \neq 0$ (car P_0 de valuation nulle signifie qu'il n'est pas divisible par X), on trouve $\lambda_0 = 0$.

On a donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k P_k = 0$ puis en dérivant : $\sum_{k=1}^n \lambda_k P'_k = 0$. Chaque polynôme P'_k pour $k \geq 1$ est de valuation $k - 1$ (car si 0 est racine d'ordre i d'un polynôme P , il est racine d'ordre $i - 1$ de P'), donc en évaluant de nouveau en 0 on trouve $\lambda_1 = 0$ etc... (=récurrence, à rédiger pour les puristes).

On démontre ainsi que tous les λ_k sont nuls, cqfd.

Théorème 11: dimension d'un espace vectoriel produit :

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est de dimension finie et $\dim(E) = \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$.

 **Démonstration:**

Il suffit bien sûr de le démontrer pour $n = 2$ (ensuite, récurrence immédiate).

Dans ce cas, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E_1 et $(f_1, \dots, f_q)$ est une base de E_2 , on vérifie aisément que la famille

$$((e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_p, 0), (0, f_1), (0, f_2), \dots, (0, f_q))$$

est une base de $E_1 \times E_2$ (facile, détails en classe)

VIII. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie**Théorème 12:**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E .

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

 **Démonstration:**

1. On considère l'ensemble des systèmes libres de F (il en existe au moins un, $\emptyset$). Ce sont aussi des systèmes libres de E , donc leur cardinal est majoré par $\dim E$. Il existe donc dans F un système libre de cardinal maximum. Notons-le $\mathcal{B}$. Si x est un élément de F qui n'appartient pas à $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est lié par définition. D'après la proposition 9, x est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{B}$ est aussi génératrice de F , et c'est donc une base de F ; par suite, F est de dimension finie. De plus, on a directement $\text{card}(\mathcal{B}) \leq \dim E$ soit $\dim F \leq \dim E$.

2. Si $\dim E = \dim F$ et si $\mathcal{B}$ est une base de F , c'est aussi une partie libre de E . Ayant $\dim E$ éléments, c'est donc aussi une base de E d'où $\text{Vect}(\mathcal{B}) = F = E$.

Théorème 13:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous-espace vectoriel de E possède (au moins) un supplémentaire.
2. Si $E = E_1 \oplus E_2$, $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

 *Démonstration:*

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . F étant de dimension finie possède une base $\mathcal{B}_1$. $\mathcal{B}_1$ est une famille libre de E donc, d'après le th. de la base incomplète, il existe une famille $\mathcal{B}_2$ telle que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ soit une base de E .
Si on pose alors $G = \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$, le résultat découle du théorème 6 page 12.
2. Avec les mêmes notations, on a $\dim E = \text{card}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{card}(\mathcal{B}_1) + \text{card}(\mathcal{B}_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

Rappelons également un résultat déjà vu mais important :

$E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si la réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2 est une base de E .

Théorème 14: formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E .
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

 *Démonstration:* ♥

Tout d'abord, si G_1 (resp. G_2) est une partie génératrice finie de E_1 (resp. E_2), alors, puisque $E_1 + E_2 = \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$, $G_1 \cup G_2$ est une partie génératrice finie de $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.

Démontrons maintenant la formule :

- Soit E'_2 un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 : $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$. D'après le th. précédent, on a $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E'_2$ (*).
- Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E'_2$.
 - La somme des sous-espaces vectoriels E_1 et E'_2 est bien directe car $E_1 \cap E'_2 = E_1 \cap (E_2 \cap E'_2) = (E_1 \cap E_2) \cap E'_2 = \{0\}$ (car $E_1 \cap E_2$ et E'_2 sont en somme directe).
 - $E'_2 \subset E_2$ donc $E_1 + E'_2 \subset E_1 + E_2$.
 - Soit $x \in E_1 + E_2$: $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$ pour $i = 1, 2$. Puisque $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$, on a $x_2 = y + x'_2$ avec $y \in E_1 \cap E_2$ et $x'_2 \in E'_2$.
D'où $x = \underbrace{(x_1 + y)}_{\in E_1} + x'_2 \in E_1 + E'_2$. Ainsi, $E_1 + E_2 \subset E_1 + E'_2$, d'où l'égalité.
- Ainsi $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E'_2$ d'où $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E'_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$ d'après (*).

Corollaire 14.1:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E .
Pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires, il faut et il suffit que :

$$E_1 + E_2 = E \quad \text{et} \quad \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$$

ou :

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E).$$

 *Démonstration:*

C'est immédiat avec la formule de Grassmann. Par exemple, si on a $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$, cette formule donne $\dim(E_1 + E_2) = \dim E$ donc $E_1 + E_2 = E$ et par suite $E_1 \oplus E_2 = E$.

Corollaire 14.2:

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , alors $\sum_{i=1}^n E_i$ est de dimension finie et :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^n E_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \dim E_i.$$

 Démonstration:

Le cas $n = 2$ découle de la formule de Grassmann. Il suffit ensuite de faire une malheureuse récurrence..

Une application importante

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E (on rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$).

Alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

 Démonstration:

- On a : $H_1 \subset H_1 + H_2$, donc $\dim(H_1 + H_2) \geq \dim H_1 = n - 1$.
Si l'on avait $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$ on aurait $H_1 + H_2 = H_1$ c'est-à-dire $H_2 \subset H_1$ d'où $H_1 = H_2$ (car mêmes dimensions), c'est exclu.
Donc $\dim(H_1 + H_2) > n - 1$ soit $\dim(H_1 + H_2) = n$ (autrement dit, $H_1 + H_2 = E$).
- La formule de Grassmann donne alors :

$$\dim E = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

$$\text{donc } \dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim E = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2.$$

Généralisation**Théorème 15:**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E telle que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe. Alors :

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim(E_i).$$

 Démonstration:

Récurrence facile car, d'après la proposition 6 page 7, si la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe, alors la somme $\sum_{i=1}^{n-1} E_i$ est directe et la somme de E_n et de $\sum_{i=1}^{n-1} E_i$ est aussi directe.

Prop 11:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe. Alors dans ce cas :

$$E = \bigoplus_{i=1}^n E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^n \dim(E_i).$$

 Démonstration:

- $\implies$ découle du résultat précédent.
- $\impliedby$: Si la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe et $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$, posons $F = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$ d'après le résultat précédent, d'où $F = E$.

Prop 12:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \sum_{i=1}^n E_i$. Alors dans ce cas :

$$E = \bigoplus_{i=1}^n E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^n \dim(E_i).$$

 Démonstration:

– $\Rightarrow$: déjà fait ci-dessus.

– $\Leftarrow$: On procède par récurrence sur n . L'hypothèse de récurrence s'écrit :

$$(\mathcal{H}_n) : \text{si } E = \sum_{i=1}^n E_i \text{ et } \dim E = \sum_{i=1}^n \dim(E_i) \text{ alors } E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$$

– $(\mathcal{H}_n)$ est vérifiée pour $n = 1$ (évident) et $n = 2$ (déjà fait).

– Supposons $(\mathcal{H}_{n-1})$ et supposons $E = \sum_{i=1}^n E_i$ avec $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$.

On a $E = \sum_{i=1}^{n-1} E_i + E_n$ donc, d'après la formule de Grassmann, $\dim E \leq \dim \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) + \dim E_n$, avec égalité si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) \cap E_n = \{0\}$ (*)

Or on sait que $\dim \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \dim E_i$ et que $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim E_i$. L'inégalité ci-dessus est donc une égalité, et on a donc $\dim \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \dim E_i$. D'après $(\mathcal{H}_{n-1})$, la somme $\sum_{i=1}^{n-1} E_i$ est directe.

On a aussi (*) : $\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) \cap E_n = \{0\}$, donc la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe d'après la proposition 6 page 7. Cela démontre $(\mathcal{H}_n)$.

Exercice d'application

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\},$$

$$\text{et } H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

 Solution:

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré ≤ 3 , F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E , et sa dimension est 1.

De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

- On pouvait bien sûr démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant la caractérisation habituelle :
 - F est bien inclus dans E , par définition ;
 - Le polynôme nul appartient à F puisqu'il s'annule en $0, 1, 2$, donc F est non vide ;
 - Si P, Q sont dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, (\lambda P + Q)(i) = \lambda P(i) + Q(i) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0,$$

donc $\lambda P + Q \in F$.

Mais il fallait de toutes façons faire ce qui précède pour trouver la dimension...

- Pour les 5/2 : on pouvait aussi remarquer que F est l'intersection des noyaux des trois formes linéaires $\varphi_i : P \mapsto P(i)$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, donc c'est un sous-espace vectoriel de E , puis vérifier que ces trois formes linéaires sont indépendantes, ce qui donne $\dim F = \dim \mathbb{R}_3[X] - 3 = 1$.
- H est l'ensemble des polynômes pairs de degré ≤ 3 , donc de la forme $a + bX^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; il s'agit donc du plan vectoriel engendré par les polynômes 1 et X^2 .
- Puisque $\dim F + \dim G + \dim H = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, pour montrer que ces 3 sous-espaces vectoriels sont supplémentaires il suffit de montrer que leur somme est directe.
- Pour cela on considère 3 polynômes $P \in F$, $Q \in G$ et $R \in H$ tels que $P + Q + R = 0$. Il existe alors des réels λ, μ, a, b tels que

$$P = \lambda X(X-1)(X-2), \quad Q = \mu(X-1)(X-2)(X-3) \quad \text{et} \quad R = a + bX^2.$$

Il est alors facile de montrer que la relation

$$\lambda X(X-1)(X-2) + \mu(X-1)(X-2)(X-3) + a + bX^2 = 0$$

implique $\lambda = \mu = a = b = 0$ (prendre $X = 1$ puis $X = 2$ etc...) soit $P = Q = R = 0$: CQFD.

- On pouvait aussi montrer que la réunion de bases de ces 3 sous-espaces vectoriels, c'est-à-dire la famille $\{X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2)(X-3), 1, X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$; pour cela il suffit de démontrer qu'elle est libre (4 vecteurs en dimension 4), ce qui revient au calcul précédent.

Rang d'une famille de vecteurs

Déf 15:

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .
Si $\dim(\text{Vect}((x_i)_{i \in I}))$ est finie, elle s'appelle le rang de la famille $(x_i)_{i \in I}$, noté $\text{rg}((x_i)_{i \in I})$.

Propriétés:

1. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, alors :
$$\text{rg}((x_i)_{i \in I}) \leq \dim(E).$$
2. Si $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une famille finie, alors : $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) \leq p$.

Démonstration:

1. Découle du fait que la dimension de $\text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ est forcément inférieure ou égale à celle de E .
 2. Puisque $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de $\text{Vect}((x_i)_{1 \leq i \leq p})$, son cardinal p est supérieur à la dimension de cet espace, c'est-à-dire à $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p)$.
-