Chapitre I : Révisions et compléments sur les espaces vectoriels

PSI*

Septembre 2022

Lycée d'Arsonval

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITIONS

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall\,(x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$;

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall\,(x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**);
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall\,(x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall\,(x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall\, x \in E,\ x + 0_E = x$;

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall x \in E,\ x + 0_E = x$;
  - **(v)** tout élément x de E possède un **symétrique** pour la loi $+$, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E,+,.)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E,+)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E\times E$ dans E : $\forall\,(x,y)\in E^2,\ x+y\in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall\,(x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall\,(x,y)\in E^2,\ x+y=y+x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall\,x\in E,\ x+0_E=x$;
  - **(v)** tout élément x de E possède un **symétrique** pour la loi $+$, noté $-x$: $x+(-x)=0_E$.
- . une **loi de composition externe de domaine d'opérateurs** $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application $\begin{array}{rcl}\mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E\\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda.x\end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes :

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E,+,.)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E,+)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E\times E$ dans E : $\forall\,(x,y)\in E^2,\ x+y\in E$ (loi **interne**);
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall\,(x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall\,(x,y)\in E^2,\ x+y=y+x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall\,x\in E,\ x+0_E=x$;
  - **(v)** tout élément x de E possède un **symétrique** pour la loi $+$, noté $-x$: $x+(-x)=0_E$.
- $.$ une **loi de composition externe de domaine d'opérateurs** $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application $\begin{array}{rcl}\mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E\\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda.x\end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes :

  $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall\,(x,y)\in E^2,$

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall x \in E,\ x + 0_E = x$;
  - **(v)** tout élément x de E possède un **symétrique** pour la loi $+$, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.
- $.$ une **loi de composition externe de domaine d'opérateurs** $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes :

  (i) $1_{\mathbb{K}}.x = x$;

  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2,$

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall x \in E,\ x + 0_E = x$;
  - **(v)** tout élément x de E possède un **symétrique** pour la loi $+$, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.
- . une **loi de composition externe de domaine d'opérateurs** $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2,$

(i) $1_{\mathbb{K}}.x = x$;

(ii) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$;

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall x \in E,\ x + 0_E = x$;
  - **(v)** tout élément x de E possède un **symétrique** pour la loi $+$, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.
- $.$ une **loi de composition externe de domaine d'opérateurs** $\mathbb{K}$, c'est-à-dire

  une application $\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \qquad \begin{array}{l} \textbf{(i)}\ 1_{\mathbb{K}}.x = x\,; \\ \textbf{(ii)}\ \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y\,; \\ \textbf{(iii)}\ (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x\,; \end{array}$$

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall x \in E,\ x + 0_E = x$;
  - **(v)** tout élément x de E possède un **symétrique** pour la loi $+$, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.
- $.$ une **loi de composition externe de domaine d'opérateurs** $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application $\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2,$

(i) $1_{\mathbb{K}}.x = x$;

(ii) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$;

(iii) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;

(iv) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une **loi de composition interne** sur E, telle que $(E, +)$ soit un **groupe abélien**, c'est-à-dire :
  - **(i)** la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$ (loi **interne**) ;
  - **(ii)** la loi $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - **(iii)** la loi $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$;
  - **(iv)** la loi $+$ possède un **élément neutre**, noté 0_E : $\forall x \in E,\ x + 0_E = x$;
  - **(v)** tout élément x de E possède un **symétrique** pour la loi $+$, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.
- . une **loi de composition externe de domaine d'opérateurs** $\mathbb{K}$, c'est-à-dire
  une application $\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda . x \end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \qquad \begin{array}{l} \textbf{(i)}\ 1_{\mathbb{K}} . x = x\,; \\ \textbf{(ii)}\ \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y\,; \\ \textbf{(iii)}\ (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x\,; \\ \textbf{(iv)}\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x\,. \end{array}$$

Les éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont appelés les vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E, \quad \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E,\quad \lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

Démonstration

- Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ alors $\lambda.x = 0_E$ (faire $\mu = 0$ dans **(iii)**) ; si $x = 0_E$ alors $\lambda.x = 0_E$ (faire $y = 0$ dans **(ii)**).

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

Démonstration

- Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ alors $\lambda.x = 0_E$ (faire $\mu = 0$ dans **(iii)**) ; si $x = 0_E$ alors $\lambda.x = 0_E$ (faire $y = 0$ dans **(ii)**).
- Si $\lambda.x = 0_E$: soit $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, sinon $x = \frac{1}{\lambda}.(\lambda.x)$ d'après **(iv)** et **(i)**, d'où $x = 0_E$ d'après ce qui a été fait avant.

Conséquences :

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,x \in E,\quad \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\,x \in E, (\lambda-\mu).x = \lambda.x - \mu.x$.

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E, \quad \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\, x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.

Démonstration

- On montre déjà que, pour tout scalaire λ : $(-\lambda).x = -(\lambda.x)$:

Conséquences :

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \forall\,x \in E, \quad \lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\,x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.

Démonstration

- On montre déjà que, pour tout scalaire λ : $(-\lambda).x = -(\lambda.x)$:
  en effet, d'après **(iii)**, $(\lambda + (-\lambda)).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ d'où $0_E = \lambda.x + (-\lambda).x$ ce qui prouve que $(-\lambda).x$ est le symétrique de $\lambda.x$ pour la loi $+$, c'est-à-dire est égal à $-\lambda.x$.

Conséquences :

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E,\quad \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\, x \in E, (\lambda-\mu).x = \lambda.x - \mu.x$.

Démonstration

- On montre déjà que, pour tout scalaire λ : $(-\lambda).x = -(\lambda.x)$:
  en effet, d'après **(iii)**, $(\lambda + (-\lambda)).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ d'où $0_E = \lambda.x + (-\lambda).x$ ce qui prouve que $(-\lambda).x$ est le symétrique de $\lambda.x$ pour la loi $+$, c'est-à-dire est égal à $-\lambda.x$.
- D'où : $(\lambda-\mu).x = (\lambda+(-\mu)).x = \lambda.x + (-\mu).x = \lambda.x + (-\mu).x = \lambda.x - \mu.x$.

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E,\quad \lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\, x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, (x, y) \in E^2,\ \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$.

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$.

Démonstration

- On commence par montrer que $\lambda.(-x) = -\lambda.x$:

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$.

Démonstration

- On commence par montrer que $\lambda.(-x) = -\lambda.x$:
  en effet, d'après le résultat précédent on a $(-1).x = -x$ d'où d'après **(iv)**,
  $$\lambda.(-x) = \lambda.((-1).x)) = ((-1)\lambda).x = (-\lambda).x = -\lambda.x\,.$$

Conséquences :

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$.

Démonstration

- On commence par montrer que $\lambda.(-x) = -\lambda.x$:
  en effet, d'après le résultat précédent on a $(-1).x = -x$ d'où d'après **(iv)**,
  $$\lambda.(-x) = \lambda.((-1).x)) = ((-1)\lambda).x = (-\lambda).x = -\lambda.x.$$
- D'où $\lambda.(x - y) = \lambda.(x + (-y)) = \lambda.x + \lambda.(-y) = \lambda.x - \lambda.y$.

Conséquences :

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\,\forall\,x\in E,\quad \lambda.x=0_E \iff \lambda=0_{\mathbb{K}}$ ou $x=0_E$.
- $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\forall\,x\in E,(\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x$.
- $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\,\forall\,(x,y)\in E^2,\,\lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y$.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
3. Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D, E)$ (noté aussi E^D) des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$\begin{cases} (f, g) \longmapsto f + g & \text{avec :} \quad \forall\, x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) +_E g(x) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda.f & \text{avec :} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{cases}$$

Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle de D dans E, qui à tout élément $x \in D$ associe le vecteur 0_E.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
3. Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D, E)$ (noté aussi E^D) des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$\begin{cases} (f, g) \longmapsto f + g & \text{avec :} \quad \forall\, x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) +_E g(x) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda.f & \text{avec :} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{cases}$$

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle de D dans E, qui à tout élément $x \in D$ associe le vecteur 0_E.

4. En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}(\mathbb{N}, E)$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où les lois sont ainsi définies :

   si u et v sont deux suites à valeurs dans E et λ un scalaire :

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
3. Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D, E)$ (noté aussi E^D) des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$\begin{cases} (f, g) \longmapsto f + g & \text{avec :} \quad \forall\, x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) +_E g(x) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda.f & \text{avec :} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{cases}$$

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle de D dans E, qui à tout élément $x \in D$ associe le vecteur 0_E.
4. En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}(\mathbb{N}, E)$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où les lois sont ainsi définies :

   si u et v sont deux suites à valeurs dans E et λ un scalaire :
   - $u + v$ est la suite donnée par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(u+v)_n = u_n + v_n$;
   - $\lambda.u$ est la suite donnée par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda.u_n$.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

3. Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D, E)$ (noté aussi E^D) des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$\left\{ \begin{array}{lll} (f,g) \longmapsto f+g & \text{avec :} & \forall\, x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) +_E g(x) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda.f & \text{avec :} & (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{array} \right.$$

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle de D dans E, qui à tout élément $x \in D$ associe le vecteur 0_E.

4. En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}(\mathbb{N}, E)$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où les lois sont ainsi définies :

   si u et v sont deux suites à valeurs dans E et λ un scalaire :

   - $u + v$ est la suite donnée par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(u+v)_n = u_n + v_n$;
   - $\lambda.u$ est la suite donnée par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda.u_n$.

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la suite nulle, c'est-à-dire telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0_E$.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
3. Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D,E)$ (noté aussi E^D) des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$\begin{cases} (f,g) \longmapsto f+g & \text{avec :} \quad \forall\, x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) +_E g(x) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda.f & \text{avec :} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{cases}$$

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle de D dans E, qui à tout élément $x \in D$ associe le vecteur 0_E.
4. En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}(\mathbb{N}, E)$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où les lois sont ainsi définies :

   si u et v sont deux suites à valeurs dans E et λ un scalaire :
   - $u+v$ est la suite donnée par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(u+v)_n = u_n + v_n$;
   - $\lambda.u$ est la suite donnée par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda.u_n$.

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la suite nulle, c'est-à-dire telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0_E$.
5. $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

3. Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D, E)$ (noté aussi E^D) des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$\begin{cases} (f, g) \longmapsto f + g & \text{avec :} \quad \forall\, x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) +_E g(x) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda.f & \text{avec :} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{cases}$$

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle de D dans E, qui à tout élément $x \in D$ associe le vecteur 0_E.

4. En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}(\mathbb{N}, E)$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où les lois sont ainsi définies :

   si u et v sont deux suites à valeurs dans E et λ un scalaire :
   - $u + v$ est la suite donnée par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n$;
   - $\lambda.u$ est la suite donnée par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda.u_n$.

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la suite nulle, c'est-à-dire telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 0_E$.

5. $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

6. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1: *Espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies par :

$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_p),\ (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)\\ \lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)\end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i.

Rem : Le vecteur nul de E est le p-uplet $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_p})$.

Proposition 1: *Espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies par :

$\forall\,(x_1, x_2, \dots, x_p),\ (y_1, y_2, \dots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_p) + (y_1, y_2, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p)\\ \lambda.(x_1, x_2, \dots, x_p) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_p)\end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i.

Rem : Le vecteur nul de E est le p-uplet $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_p})$.

Démonstration

- On vérifie déjà que $(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p, +)$ est un groupe abélien ; il suffit d'écrire...

Proposition 1: *Espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies par :

$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_p),\ (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)\\ \lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)\end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i.

Rem : Le vecteur nul de E est le p-uplet $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_p})$.

Démonstration

- On vérifie déjà que $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p, +)$ est un groupe abélien ; il suffit d'écrire...

  Par exemple, la commutativité de la loi $+$ dans $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ découle de celle dans les E_i de la façon suivante :

  $$\begin{aligned}&\forall\,(x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p\,,\\ &(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p) \quad \text{(définition de la loi + dans } E\text{)}\\ &\qquad = (y_1 + x_1, \ldots, y_p + x_p) \quad \text{(car chaque loi + est commutative dans chaque } E_i\text{)}\\ &\qquad = (y_1, \ldots, y_p) + (x_1, \ldots, x_p) \quad \text{(définition de la loi + dans } E\text{)}\end{aligned}$$

Proposition 1: *Espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies par :

$\forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_p),\ (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)\\ \lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)\end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i.

Rem : Le vecteur nul de E est le p-uplet $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_p})$.

Démonstration

- On vérifie déjà que $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p, +)$ est un groupe abélien ; il suffit d'écrire...
- Les propriétés de la loi externe se vérifient elles aussi aisément par le calcul :

Proposition 1: *Espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies par :

$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_p),\ (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)\\ \lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)\end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i.

Rem : Le vecteur nul de E est le p-uplet $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_p})$.

Démonstration

- On vérifie déjà que $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p, +)$ est un groupe abélien ; il suffit d'écrire...
- Les propriétés de la loi externe se vérifient elles aussi aisément par le calcul :

  Par exemple, pour la propriété (ii), si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ sont dans $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned}\lambda.(x+y) = \lambda.(x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p) &= (\lambda.(x_1 + y_1), \ldots, \lambda.(x_p + y_p)) \quad \text{(définition des lois dans } E)\\ &= (\lambda.x_1 + \lambda.y_1, \ldots, \lambda.x_p + \lambda.y_p) \quad \text{(car les } E_i \text{ sont des e.v)}\\ &= (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_p) + (\lambda.y_1, \ldots, \lambda.y_p) = \lambda.x + \lambda.y \quad \text{(définition des lois dans } E)\end{aligned}$$

Proposition 1: *Espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies par :

$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_p),\ (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)\\ \lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)\end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i.

Rem : Le vecteur nul de E est le p-uplet $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_p})$.

Exemple

$\mathbb{K}^p$ (ensemble des p-uplets de scalaires) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies ci-dessus

SOUS-ESPACES VECTORIELS

Définition 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F,+,.)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Définition 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un <u>sous-espace vectoriel</u> de E si $(F,+,.)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

Définition 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;

Définition 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F, +)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;

Définition 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F, +)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,x \in F,\ \lambda.x \in F$.

Définition 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F, +)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,x \in F,\ \lambda.x \in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F \subset E$;

(ii) $F \neq \emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x, y) \in F^2 \quad : \quad \lambda x + \mu y \ \in\ F.$

Définition 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F, +)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,x \in F,\ \lambda.x \in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F \subset E$;

(ii) $F \neq \emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x, y) \in F^2 \quad : \quad \lambda x + \mu y \ \in \ F$.

Démonstration

1. - La propriété (iii) avec $\lambda = \mu = 1$ implique déjà que la loi $+$ est interne dans F. Étant associative dans E, elle l'est aussi a fortiori dans F.

Définition 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F,+,.)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F,+)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,x\in F,\ \lambda.x\in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F\subset E$;

(ii) $F\neq\emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x,y)\in F^2\quad:\quad\lambda x+\mu y\ \in\ F$.

Démonstration

1.
   - La propriété (iii) avec $\lambda=\mu=1$ implique déjà que la loi $+$ est interne dans F. Étant associative dans E, elle l'est aussi a fortiori dans F.
   - La propriété (ii) et la propriété (iii) avec $\lambda=1,\ \mu=-1$ et $x=y$ (cela est possible car $F\neq\emptyset$!) impliquent que 0_E appartient à F ; ce sera alors forcément l'élément neutre de $(F,+)$.

Définition 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F,+,.)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F,+)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,x\in F,\ \lambda.x\in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F\subset E$;

(ii) $F\neq\emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x,y)\in F^2\quad :\quad \lambda x+\mu y\ \in\ F$.

Démonstration

1.
   - La propriété (iii) avec $\lambda=\mu=1$ implique déjà que la loi $+$ est interne dans F. Étant associative dans E, elle l'est aussi a fortiori dans F.
   - La propriété (ii) et la propriété (iii) avec $\lambda=1,\ \mu=-1$ et $x=y$ (cela est possible car $F\neq\emptyset$!) impliquent que 0_E appartient à F ; ce sera alors forcément l'élément neutre de $(F,+)$.
   - La propriété (iii) avec $\lambda=-1$ et $\mu=0$ implique que, si x appartient à F, il en est de même de $-x$.

Définition 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F, +)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda.x \in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F \subset E$;

(ii) $F \neq \emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x, y) \in F^2 \quad : \quad \lambda x + \mu y \ \in \ F$.

Démonstration

1.
   - La propriété (iii) avec $\lambda = \mu = 1$ implique déjà que la loi $+$ est interne dans F. Étant associative dans E, elle l'est aussi a fortiori dans F.
   - La propriété (ii) et la propriété (iii) avec $\lambda = 1,\ \mu = -1$ et $x = y$ (cela est possible car $F \neq \emptyset$!) impliquent que 0_E appartient à F ; ce sera alors forcément l'élément neutre de $(F, +)$.
   - La propriété (iii) avec $\lambda = -1$ et $\mu = 0$ implique que, si x appartient à F, il en est de même de $-x$.

   On en déduit finalement que $(F, +)$ est un groupe abélien.

Définition 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F,+,.)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F,+)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité);
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,x\in F,\ \lambda.x\in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F\subset E$;

(ii) $F\neq\emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x,y)\in F^2\quad:\quad \lambda x+\mu y\ \in\ F$.

Démonstration

1.
   - La propriété (iii) avec $\lambda=\mu=1$ implique déjà que la loi $+$ est interne dans F. Étant associative dans E, elle l'est aussi a fortiori dans F.
   - La propriété (ii) et la propriété (iii) avec $\lambda=1,\ \mu=-1$ et $x=y$ (cela est possible car $F\neq\emptyset$!) impliquent que 0_E appartient à F; ce sera alors forcément l'élément neutre de $(F,+)$.
   - La propriété (iii) avec $\lambda=-1$ et $\mu=0$ implique que, si x appartient à F, il en est de même de $-x$.

   On en déduit finalement que $(F,+)$ est un groupe abélien.

2. La propriété (ii) avec $\mu=0$ implique que F est stable par la loi ., donc la loi . est bien une loi de composition externe sur F; quant aux quatre propriétés de cette loi, puisqu'elles sont vraies dans E, elles le sont a fortiori dans F, donc $(F,+,.)$ est bien un espace vectoriel.

Définition 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F,+,.)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F,+)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité);
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,x\in F,\ \lambda.x\in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F\subset E$;

(ii) $F\neq\emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x,y)\in F^2\quad:\quad\lambda x+\mu y\ \in\ F.$

Remarque :
On peut remplacer la condition (ii) par : $0_E\in F$.
C'est ce que l'on fait généralement puisque, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors nécessairement il contient 0_E.

Définition 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F, +)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,x \in F,\ \lambda.x \in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F \subset E$;

(ii) $F \neq \emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x, y) \in F^2 \quad : \quad \lambda x + \mu y \ \in\ F.$

Remarque : On peut remplacer la condition **(iii)** par :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,(x, y) \in F^2, \quad \lambda x + y \in F$$

ou par :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,(x, y) \in F^2, \quad x + y \in F \ \textbf{et}\ \lambda x \in F$$

Définition 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **partie** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F,+,.)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Cette définition **implique**, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall\,(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F,+)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité);
- que la loi . est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,x\in F,\ \lambda.x\in F$.

Théorème 1: *caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F\subset E$;

(ii) $F\neq\emptyset$;

(iii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ ,\ \forall(x,y)\in F^2\quad :\quad \lambda x+\mu y\ \in\ F.$

Remarque : Si F est un sous-espace vectoriel de E, il est alors facile de démontrer par récurrence que F est **stable par combinaisons linéaires** c'est-à-dire :

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\ \forall\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \forall\,(x_1,\ldots,x_n)\in F^n,\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in F\,.$$

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

En effet :

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

En effet :

- $\mathbb{K}_n[X] \neq \emptyset$, car le polynôme nul appartient à $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

En effet :

- $\mathbb{K}_n[X] \neq \emptyset$, car le polynôme nul appartient à $\mathbb{K}_n[X]$.
- Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors $\deg(\lambda P + Q) \leqslant n$ c'est-à-dire $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits <u>triviaux</u>).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

En effet :

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

En effet :

- Le polynôme nul est bien un multiple de P car il s'écrit $0 \times P$, donc $\mathbb{K}[X] \cdot P \neq \emptyset$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

En effet :

- Le polynôme nul est bien un multiple de P car il s'écrit $0 \times P$, donc $\mathbb{K}[X] \cdot P \neq \emptyset$.
- Soient $A, B \in \mathbb{K}[X] \cdot P$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; il existe des polynômes Q_1 et Q_2 tels que $A = Q_1 P$ et $B = Q_2 P$ donc $A + \lambda B = (Q_1 + \lambda Q_2)P$ est encore un multiple de P : $A + \lambda B \in \mathbb{K}[X] \cdot P$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
4. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
4. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Démonstration

Cf. cours sur la continuité : si f et g sont continues, il en est de même de $\lambda f + g$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
4. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 2

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E, leur intersection $\bigcap_{i\in I} E_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
4. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 2

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E, leur intersection $\bigcap\limits_{i \in I} E_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Notons $F = \bigcap\limits_{i \in I} E_i$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
4. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 2

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E, leur intersection $\bigcap\limits_{i \in I} E_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Notons $F = \bigcap\limits_{i \in I} E_i$.

- $F \neq \emptyset$: en effet, pour tout $i \in I$, $0_E \in E_i$ donc $0_E \in F$.

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré **exactement** n n'est **PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
4. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 2

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E, leur intersection $\bigcap\limits_{i\in I} E_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Notons $F = \bigcap\limits_{i\in I} E_i$.

- $F \neq \emptyset$: en effet, pour tout $i \in I$, $0_E \in E_i$ donc $0_E \in F$.
- Si $x, y \in F$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x, y \in E_i$ pour tout $i \in I$ donc $\lambda x + y \in E_i$ car E_i sous-espace vectoriel de E, donc finalement $\lambda x + y \in F$.

Proposition 3

Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X ;

On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par X, et on le note $\text{Vect}(X)$.

Proposition 3

Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X ;

On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par X, et on le note $\mathrm{Vect}(X)$.

Exemples

1. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$

Proposition 3

Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X ;

On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par X, et on le note $\text{Vect}(X)$.

Exemples

1. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
2. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(F) = F$.

Proposition 3

Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X ;

On l'appelle <u>sous-espace vectoriel engendré par X</u>, et on le note $\text{Vect}(X)$.

Exemples

1. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
2. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(F) = F$.

La **réunion** de sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 3

Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X ;

On l'appelle <u>sous-espace vectoriel engendré par X</u>, et on le note $\text{Vect}(X)$.

Exemples

1. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
2. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(F) = F$.

La **réunion** de sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E .

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, la *réunion* F des deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ puisque, par exemple, $(1, 0) + (0, 1)$ n'appartient pas à F.

Proposition 3

Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X ;

On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par X, et on le note $\mathrm{Vect}(X)$.

Exemples

1. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
2. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(F) = F$.

La **réunion** de sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E .

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, la *réunion* F des deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ puisque, par exemple, $(1, 0) + (0, 1)$ n'appartient pas à F.

Plus précisément, on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition 4

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Proposition 4

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Démonstration

- L'implication $\Leftarrow$ est immédiate.

Proposition 4

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Démonstration

• L'implication $\Leftarrow$ est immédiate.

• Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E, tels que $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel. On raisonne par l'absurde :

Proposition 4

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Démonstration

• L'implication $\Leftarrow$ est immédiate.

• Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E, tels que $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel. On raisonne par l'absurde :

la négation de la proposition « $A \subset B$ ou $B \subset A$ » est « $A \not\subset$B et $B \not\subset A$ » c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tq $a \notin B$ et $b \in B$ tq $b \notin A$.

Proposition 4

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Démonstration

• L'implication $\Leftarrow$ est immédiate.

• Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E, tels que $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel. On raisonne par l'absurde :

la négation de la proposition « $A \subset B$ ou $B \subset A$ » est « $A \not\subset$B et $B \not\subset A$ » c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tq $a \notin B$ et $b \in B$ tq $b \notin A$.

Alors $a + b \in A \cup B$ puisque $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel, donc $a + b \in A$ ou $a + b \in B$.

Proposition 4

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Démonstration

- L'implication $\Leftarrow$ est immédiate.
- Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E, tels que $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel. On raisonne par l'absurde :

la négation de la proposition « $A \subset B$ ou $B \subset A$ » est « $A \not\subset$B et $B \not\subset A$ » c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tq $a \notin B$ et $b \in B$ tq $b \notin A$.

Alors $a + b \in A \cup B$ puisque $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel, donc $a + b \in A$ ou $a + b \in B$.

Si, par exemple, $a + b \in A$, on aurait $b = (a + b) - a \in A$ puisque A est un sous-espace vectoriel, d'où la contradiction.

COMBINAISONS LINÉAIRES

Définition 3

Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite à support fini si et seulement si l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est fini (on dit aussi que les λ_i sont presque tous nuls).

On dit de même qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est à support fini si l'ensemble $\{i \in I \mid x_i \neq 0_E\}$ est fini.

Définition 3

Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite à support fini si et seulement si l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est fini (on dit aussi que les λ_i sont presque tous nuls).

On dit de même qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est à support fini si l'ensemble $\{i \in I \mid x_i \neq 0_E\}$ est fini.

Définition 4

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de cette famille s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ **à support fini** telle que :

$$x = \sum_{\substack{i\in I \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i x_i.$$

On note alors simplement $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ (somme en fait finie).

Définition 3

Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite à support fini si et seulement si l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est fini (on dit aussi que les λ_i sont presque tous nuls).

On dit de même qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est à support fini si l'ensemble $\{i \in I \mid x_i \neq 0_E\}$ est fini.

Définition 4

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de cette famille s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ **à support fini** telle que :

$$x = \sum_{\substack{i\in I \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i x_i.$$

On note alors simplement $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ (somme en fait finie).

Rem : dans le cas d'une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs, x est combinaison linéaire de cette famille si et seulement si il s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Théorème 2

Soit $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Alors $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Théorème 2

Soit $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Alors $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Démonstration

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

Théorème 2

Soit $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Alors $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Démonstration

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

- F est bien un sous-espace vectoriel de E : en effet, F est non vide (puisque $X \neq \emptyset$), et on vérifie facilement que, si x et y sont deux éléments de F et si λ appartient à $\mathbb{K}$, alors $\lambda x + y$ appartient encore à F (une combinaison linéaire de deux combinaisons linéaires d'éléments de X est encore une combinaison linéaire d'éléments de X).

Théorème 2

Soit $X = (x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Alors $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Démonstration

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

- F est bien un sous-espace vectoriel de E : en effet, F est non vide (puisque $X \neq \emptyset$), et on vérifie facilement que, si x et y sont deux éléments de F et si λ appartient à $\mathbb{K}$, alors $\lambda x + y$ appartient encore à F (une combinaison linéaire de deux combinaisons linéaires d'éléments de X est encore une combinaison linéaire d'éléments de X).
- F contient évidemment X.

Théorème 2

Soit $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Alors $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Démonstration

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

- F est bien un sous-espace vectoriel de E : en effet, F est non vide (puisque $X \neq \emptyset$), et on vérifie facilement que, si x et y sont deux éléments de F et si λ appartient à $\mathbb{K}$, alors $\lambda x + y$ appartient encore à F (une combinaison linéaire de deux combinaisons linéaires d'éléments de X est encore une combinaison linéaire d'éléments de X).
- F contient évidemment X.
- Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant X, il contient $\lambda_i x_i$ pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in X$, donc il contient F.

Théorème 2

Soit $X = (x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Alors $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Démonstration

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

- F est bien un sous-espace vectoriel de E : en effet, F est non vide (puisque $X \neq \emptyset$), et on vérifie facilement que, si x et y sont deux éléments de F et si λ appartient à $\mathbb{K}$, alors $\lambda x + y$ appartient encore à F (une combinaison linéaire de deux combinaisons linéaires d'éléments de X est encore une combinaison linéaire d'éléments de X).
- F contient évidemment X.
- Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant X, il contient $\lambda_i x_i$ pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in X$, donc il contient F.
- F est donc bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X.

Théorème 2

Soit $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Alors $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Démonstration

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

- F est bien un sous-espace vectoriel de E : en effet, F est non vide (puisque $X \neq \emptyset$), et on vérifie facilement que, si x et y sont deux éléments de F et si λ appartient à $\mathbb{K}$, alors $\lambda x + y$ appartient encore à F (une combinaison linéaire de deux combinaisons linéaires d'éléments de X est encore une combinaison linéaire d'éléments de X).
- F contient évidemment X.
- Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant X, il contient $\lambda_i x_i$ pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in X$, donc il contient F.
- F est donc bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X.

Remarque : Ce théorème prouve, en particulier, que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.
Ce résultat peut être utile pour abréger certaines démonstrations (voir dernier exemple ci-dessous).

Exemples

1. Soit $x \in E$. Alors $\mathrm{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}.x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
   Si $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ s'appelle la droite vectorielle engendrée par x.

Exemples

1. Soit $x \in E$. Alors $\mathrm{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}.x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
   Si $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ s'appelle la <u>droite vectorielle engendrée par x</u>.

2. Dans $\mathbb{K}[X]$: $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}\left((X^i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ et $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\left((X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}\right)$.

Exemples

1. Soit $x \in E$. Alors $\text{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}.x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
   Si $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ s'appelle la droite vectorielle engendrée par x.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$: $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}\left((X^i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ et $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\left((X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}\right)$.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   On peut dire sans calcul que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car on remarque qu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est donc le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\{I, J\})$.

Exemples

1. Soit $x \in E$. Alors $\text{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}.x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
   Si $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ s'appelle la droite vectorielle engendrée par x.

2. Dans $\mathbb{K}[X]$: $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}\left((X^i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ et $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\left((X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}\right)$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   On peut dire sans calcul que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car on remarque qu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est donc le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\{I, J\})$.

4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel.
   En effet, $u = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$u = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)\,.$$
   F est donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$.

Exemples

1. Soit $x \in E$. Alors $\mathrm{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}.x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
   Si $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ s'appelle la <u>droite vectorielle engendrée par x</u>.

2. Dans $\mathbb{K}[X]$: $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}\left((X^i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ et $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\left((X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}\right)$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   On peut dire sans calcul que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car on remarque qu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est donc le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{I, J\})$.

4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel.
   En effet, $u = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$u = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)\,.$$
   F est donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$.

La méthode utilisée dans ces deux derniers exemples est importante à retenir.

SOMME D'UNE FAMILLE FINIE DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Définition 5

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

On appelle <u>somme</u> des E_i, notée $\sum_{i=1}^{n} E_i$, l'ensemble des vecteurs x de E qui peuvent s'écrire d'au moins une façon sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists\,(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \text{ tq } x = \sum_{i=1}^{n} x_i \right\}$$

Définition 5

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

On appelle <u>somme</u> des E_i, notée $\sum_{i=1}^{n} E_i$, l'ensemble des vecteurs x de E qui peuvent s'écrire d'au moins une façon sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists\,(x_1,\dots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \text{ tq } x = \sum_{i=1}^{n} x_i \right\}$$

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :
$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Démonstration

Soit $F = \sum_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :
$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Démonstration

Soit $F = \sum_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

1. Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :
$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Démonstration

Soit $F = \sum_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

1. Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. En effet, 0_E appartient à E_i pour tout i donc appartient à F, et, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in F$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in F$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i, alors $\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + y_i)$ appartient à F puisque $\lambda x_i + y_i \in E_i$ pour tout i (les E_i sont des sous-espaces vectoriels).

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Démonstration

Soit $F = \sum_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

1. Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. En effet, 0_E appartient à E_i pour tout i donc appartient à F, et, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in F$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in F$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i, alors $\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)$ appartient à F puisque $\lambda x_i + y_i \in E_i$ pour tout i (les E_i sont des sous-espaces vectoriels).
2. F est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par cette réunion, car :

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :
$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Démonstration

Soit $F = \sum_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

1. Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. En effet, 0_E appartient à E_i pour tout i donc appartient à F, et, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in F$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in F$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i, alors $\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + y_i)$ appartient à F puisque $\lambda x_i + y_i \in E_i$ pour tout i (les E_i sont des sous-espaces vectoriels).

2. F est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par cette réunion, car :
   - F contient bien tous les E_i, car $x_i \in E_i$ peut s'écrire $x_i = 0 + \cdots + 0 + x_i + 0 + \cdots + 0$. Il contient donc leur réunion.

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :
$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Démonstration

Soit $F = \sum_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

1. Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. En effet, 0_E appartient à E_i pour tout i donc appartient à F, et, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in F$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in F$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i, alors $\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)$ appartient à F puisque $\lambda x_i + y_i \in E_i$ pour tout i (les E_i sont des sous-espaces vectoriels).

2. F est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par cette réunion, car :
   - F contient bien tous les E_i, car $x_i \in E_i$ peut s'écrire $x_i = 0 + \cdots + 0 + x_i + 0 + \cdots + 0$. Il contient donc leur réunion.
   - F est bien un sous-espace vectoriel de E comme on l'a vu dans le 1er point.

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :
$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Démonstration

Soit $F = \sum_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

1. Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. En effet, 0_E appartient à E_i pour tout i donc appartient à F, et, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in F$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in F$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i, alors $\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)$ appartient à F puisque $\lambda x_i + y_i \in E_i$ pour tout i (les E_i sont des sous-espaces vectoriels).

2. F est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par cette réunion, car :
   - F contient bien tous les E_i, car $x_i \in E_i$ peut s'écrire $x_i = 0 + \cdots + 0 + x_i + 0 + \cdots + 0$. Il contient donc leur réunion.
   - F est bien un sous-espace vectoriel de E comme on l'a vu dans le 1er point.
   - Enfin, si un sous-espace vectoriel G de E contient la réunion des E_i, puisqu'il est stable par $+$, il contiendra F.

Théorème 3

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Plus précisément, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :
$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Remarque : Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}.x_i$.

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Remarque : Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}.x_i$.

Démonstration

En effet, on a vu que $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où les λ_i décrivent $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^{n} y_i$ où les y_i décrivent $\mathbb{K}.x_i$.

Théorème 3

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Remarque : Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}.x_i$.

Démonstration

En effet, on a vu que $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où les λ_i décrivent $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^{n} y_i$ où les y_i décrivent $\mathbb{K}.x_i$.

Généralisation : Dans le cas d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, on a $\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{i \in I} E_i$, où cette somme désigne l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i \in I} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$ et où la famille (x_i) est **à support fini** (c'est-à-dire que les x_i sont tous nuls sauf un nombre fini).

Définition 6

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ est <u>directe</u> si et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in \sum_{i=1}^{n} E_i, \text{ il existe une } \textbf{unique} \text{ famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{1\leqslant i\leqslant n} E_i \text{ telle que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

On note alors : $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i$ au lieu de $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$.

Définition 6

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est <u>directe</u> si et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in \sum_{i=1}^{n} E_i, \text{ il existe une } \textbf{unique} \text{ famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{1\leqslant i\leqslant n} E_i \text{ telle que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

On note alors : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

Exemple

$\mathbb{K}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{K}.X^i$

En effet, on sait que tout polynôme de degré $\leqslant n$ s'écrit de façon unique sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$.

Définition 6

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est <u>directe</u> si et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in \sum_{i=1}^{n} E_i, \text{ il existe une } \textbf{unique} \text{ famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{1\leqslant i\leqslant n} E_i \text{ telle que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

On note alors : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

Exemple

$$\mathbb{K}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{K}.X^i$$

En effet, on sait que tout polynôme de degré $\leqslant n$ s'écrit de façon unique sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$.

Généralisation : Dans le cas d'une famille quelconque $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, on dit que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est **directe** si tout élément x de cette somme s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i\in I} x_i$ où, pour tout $i \in I$, $x_i \in I$ et où la famille (x_i) est **à support fini**.

Par exemple, on peut écrire : $\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}.X^n$.

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Démonstration

- Supposons la somme directe, et soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ telle que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Démonstration

- Supposons la somme directe, et soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ telle que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

  Puisque $0 = 0_{E_1} + 0_{E_2} + \cdots + 0_{E_n}$ ($0_{E_i} = 0_E$ pour tout i), l'unicité de l'écriture implique $x_i = 0$ pour tout i.

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Démonstration

- Supposons la somme directe, et soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ telle que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

  Puisque $0 = 0_{E_1} + 0_{E_2} + \cdots + 0_{E_n}$ ($0_{E_i} = 0_E$ pour tout i), l'unicité de l'écriture implique $x_i = 0$ pour tout i.

- Réciproquement, si la propriété de l'énoncé est vérifiée et si un vecteur $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i, alors $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = 0$ avec $x_i - y_i \in E_i$ pour tout i (car E_i sous-espace vectoriel), ce qui implique $x_i - y_i = 0$ soit $x_i = y_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Démonstration

- Supposons la somme directe, et soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ telle que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

  Puisque $0 = 0_{E_1} + 0_{E_2} + \cdots + 0_{E_n}$ ($0_{E_i} = 0_E$ pour tout i), l'unicité de l'écriture implique $x_i = 0$ pour tout i.

- Réciproquement, si la propriété de l'énoncé est vérifiée et si un vecteur $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$ avec $x_i, y_i \in E_i$ pour tout i, alors $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) = 0$ avec $x_i - y_i \in E_i$ pour tout i (car E_i sous-espace vectoriel), ce qui implique $x_i - y_i = 0$ soit $x_i = y_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

  Il y a donc bien unicité de la décomposition, et la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Proposition 5

Pour que **deux** sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E soient en somme directe, il faut et il suffit que : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Proposition 5

Pour que **deux** sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E soient en somme directe, il faut et il suffit que : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Démonstration

- Si la somme $E_1 + E_2$ est directe, alors, si $x \in E_1 \cap E_2$, on a $0 = x + (-x)$ avec $x \in E_1$ et $-x \in E_2$ d'où $x = 0$ par le théorème précédent, soit $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Proposition 5

Pour que **deux** sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E soient en somme directe, il faut et il suffit que : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Démonstration

- Si la somme $E_1 + E_2$ est directe, alors, si $x \in E_1 \cap E_2$, on a $0 = x + (-x)$ avec $x \in E_1$ et $-x \in E_2$ d'où $x = 0$ par le théorème précédent, soit $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
- Réciproquement, supposons $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, et soient $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x_1 + x_2 = 0$. Alors $x_1 = -x_2 \in E_1 \cap E_2$ d'où $x_1 = x_2 = 0$, ce qui prouve par le théorème précédent que la somme $E_1 + E_2$ est directe.

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Proposition 5

Pour que **deux** sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E soient en somme directe, il faut et il suffit que : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Cela ne se généralise pas à plus de **deux** sous-espaces vectoriels.

Théorème 4: *caractérisation d'une somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Proposition 5

Pour que **deux** sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E soient en somme directe, il faut et il suffit que : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Cela ne se généralise pas à plus de **deux** sous-espaces vectoriels.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base (e_1, e_2), soient $F = \mathbb{R}e_1$, $G = \mathbb{R}e_2$ et $H = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$: on a bien $F \cap G \cap H = \{0\}$ mais la somme $F + G + H$ n'est PAS directe : le vecteur $e_1 + e_2$, par exemple, peut se décomposer de plusieurs façons différentes :

$$e_1 + e_2 = \underbrace{2.e_1}_{\in F} + \underbrace{2.e_2}_{\in G} + \underbrace{(-(e_1 + e_2))}_{\in H} = \underbrace{-e_1}_{\in F} + \underbrace{(-e_2)}_{\in G} + \underbrace{2.(e_1 + e_2)}_{\in H}.$$

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;\,n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Démonstration

- Supposons que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe, et soit $j \in [\![1\,;n]\!]$.

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Démonstration

- Supposons que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe, et soit $j \in [\![1\,;n]\!]$.
  - La somme $\sum_{i\neq j} E_i$ est directe, car si $\sum_{i\neq j} x_i = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \neq j$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ en posant $x_j = 0$, d'où $x_i = 0$ pour tout i.

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;\,n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Démonstration

- Supposons que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe, et soit $j \in [\![1\,;\,n]\!]$.
  - La somme $\sum_{i\neq j} E_i$ est directe, car si $\sum_{i\neq j} x_i = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \neq j$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ en posant $x_j = 0$, d'où $x_i = 0$ pour tout i.
  - Montrons que la somme $E_j + \left(\sum_{i\neq j} E_i\right)$ est directe :

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Démonstration

- Supposons que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe, et soit $j \in [\![1\,;n]\!]$.
  - La somme $\sum_{i\neq j} E_i$ est directe, car si $\sum_{i\neq j} x_i = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \neq j$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ en posant $x_j = 0$, d'où $x_i = 0$ pour tout i.
  - Montrons que la somme $E_j + \left(\sum_{i\neq j} E_i\right)$ est directe :

    Si $x_j + y = 0$ avec $x_j \in E_j$ et $y \in \sum_{i\neq j} E_i$, alors on peut écrire $y = \sum_{i\neq j} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \neq j$, d'où $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ d'où $x_i = 0$ pour tout i, donc $x_j = y = 0$.

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Démonstration

- Réciproquement, s'il existe $j \in [\![1\,;n]\!]$ telle que la condition de l'énoncé soit vérifiée, montrons que $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe :

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Démonstration

- Réciproquement, s'il existe $j \in [\![1\,;n]\!]$ telle que la condition de l'énoncé soit vérifiée, montrons que $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe :

  si l'on a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i, alors $x_j + y = 0$ en posant $y = \sum_{i\neq j} x_i$, donc $x_j = y = 0$ puisque $E_j + \left(\sum_{i\neq j} E_i\right)$ est directe, puis $y = \sum_{i\neq j} x_i = 0$ implique $x_i = 0$ pour tout $i \neq j$ puisque la somme $\sum_{i\neq j} E_i$ est directe.

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Démonstration

- Réciproquement, s'il existe $j \in [\![1\,;n]\!]$ telle que la condition de l'énoncé soit vérifiée, montrons que $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe :

  si l'on a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i, alors $x_j + y = 0$ en posant $y = \sum_{i\neq j} x_i$, donc $x_j = y = 0$ puisque $E_j + \left(\sum_{i\neq j} E_i\right)$ est directe, puis $y = \sum_{i\neq j} x_i = 0$ implique $x_i = 0$ pour tout $i \neq j$ puisque la somme $\sum_{i\neq j} E_i$ est directe.

  Finalement, on a bien $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

Proposition 6: *Associativité de la somme directe*

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{il existe/pour tout } j \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq j}} E_i \text{ est directe et } \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq j}} E_i \text{ et } E_j \text{ sont en somme directe.}$$

Définition 7

n sous-espaces vectoriels $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E sont dits <u>supplémentaires</u> si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Cela équivaut à :

$$\forall\, x \in E,\ \exists\,!(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration

■ Déjà, **il ne faut pas oublier** de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont bien des **sous-espaces vectoriels** de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, même si cela est est assez élémentaire... (à faire).

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration

■ Déjà, **il ne faut pas oublier** de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont bien des **sous-espaces vectoriels** de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, même si cela est est assez élémentaire... (à faire).

■ Démontrons ensuite qu'ils sont supplémentaires, en procédant par « analyse/synthèse » (ou : « conditions nécessaires/suffisantes » ou : « unicité/existence »).

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration

■ Déjà, **il ne faut pas oublier** de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont bien des **sous-espaces vectoriels** de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, même si cela est est assez élémentaire... (à faire).

■ Démontrons ensuite qu'ils sont supplémentaires, en procédant par « analyse/synthèse » (ou : « conditions nécessaires/suffisantes » ou : « unicité/existence »).

- *Analyse (ou : condition nécessaire, unicité)*

  Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; supposons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration

■ Déjà, **il ne faut pas oublier** de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont bien des **sous-espaces vectoriels** de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, même si cela est est assez élémentaire... (à faire).

■ Démontrons ensuite qu'ils sont supplémentaires, en procédant par « analyse/synthèse » (ou : « conditions nécessaires/suffisantes » ou : « unicité/existence »).

- *Analyse (ou : condition nécessaire, unicité)*

  Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; supposons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  $$f(x) = g(x) + h(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

  d'où l'on tire immédiatement :

  $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \qquad (*)$$

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.
   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Démonstration

■ Déjà, **il ne faut pas oublier** de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont bien des **sous-espaces vectoriels** de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, même si cela est est assez élémentaire... (à faire).

■ Démontrons ensuite qu'ils sont supplémentaires, en procédant par « analyse/synthèse » (ou : « conditions nécessaires/suffisantes » ou : « unicité/existence »).

- *Analyse (ou : condition nécessaire, unicité)*
  Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; supposons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$f(x) = g(x) + h(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$
  d'où l'on tire immédiatement :
  $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \tfrac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \tfrac{f(x)-f(-x)}{2} \qquad (*)$$
  g et h sont donc déterminées de façon unique par les égalités $(*)$.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.
   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Démonstration

■ Déjà, **il ne faut pas oublier** de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont bien des **sous-espaces vectoriels** de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, même si cela est est assez élémentaire... (à faire).

■ Démontrons ensuite qu'ils sont supplémentaires, en procédant par « analyse/synthèse » (ou : « conditions nécessaires/suffisantes » ou : « unicité/existence »).

- *Analyse (ou : condition nécessaire, unicité)*
  Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; supposons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$f(x) = g(x) + h(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$
  d'où l'on tire immédiatement :
  $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \qquad (*)$$
  g et h sont donc déterminées de façon unique par les égalités $(*)$.
- *Synthèse (ou : condition suffisante, existence)*
  Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On peut alors définir 2 applications g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par les formules $(*)$.
  Il est alors facile de vérifier que l'on a bien
  $$f = g + h \quad , \quad g \text{ paire} \quad \text{et} \quad h \text{ impaire.}$$

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.
   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Démonstration

■ Déjà, **il ne faut pas oublier** de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont bien des **sous-espaces vectoriels** de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, même si cela est est assez élémentaire... (à faire).

■ Démontrons ensuite qu'ils sont supplémentaires, en procédant par « analyse/synthèse » (ou : « conditions nécessaires/suffisantes » ou : « unicité/existence »).

- *Analyse (ou : condition nécessaire, unicité)*
  Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; supposons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$f(x) = g(x) + h(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$
  d'où l'on tire immédiatement :
  $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \tfrac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \tfrac{f(x)-f(-x)}{2} \qquad (*)$$
  g et h sont donc déterminées de façon unique par les égalités $(*)$.
- *Synthèse (ou : condition suffisante, existence)*
  Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On peut alors définir 2 applications g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par les formules $(*)$.
  Il est alors facile de vérifier que l'on a bien
  $$f = g + h \quad , \quad g \text{ paire} \quad \text{et} \quad h \text{ impaire.}$$

■ Conclusion : toute application $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une application $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$, cela démontre que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, tel que deg(A)= $n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

   Alors $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]A$ (ensemble des multiples de A) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, tel que $\deg(A) = n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

   Alors $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]A$ (ensemble des multiples de A) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

- On vérifie facilement qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.

   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, tel que deg(A)= $n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

   Alors $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]A$ (ensemble des multiples de A) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

- On vérifie facilement qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.
- D'après le résultat du cours sur la division euclidienne, tout polynôme P s'écrit de manière unique sous la forme $P = AQ + R$ avec $AQ \in \mathbb{K}[X].A$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$, ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité de la décomposition.

FAMILLES GÉNÉRATRICES, LIBRES, LIÉES

Définition 8

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite <u>génératrice</u> de E si $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = E$.

Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i, ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}.x_i$.

Définition 8

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite <u>génératrice</u> de E si $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = E$.

Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i, ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}.x_i$.

Proposition 7

S i $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, toute famille contenant les (x_i) (<u>sur-famille</u>) est encore une famille génératrice de E.

Définition 8

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si $\text{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = E$.

Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i, ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}.x_i$.

Proposition 7

S i $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, toute famille contenant les (x_i) (sur-famille) est encore une famille génératrice de E.

Démonstration

Soit $(x_i)_{i\in I\cup J}$ une famille contenant la précédente. Par hypothèse, tout vecteur $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ avec les λ_i presque tous nuls, donc s'écrit aussi $x = \sum_{i\in I\cup J} \lambda_i x_i$ en ayant posé $\lambda_i = 0$ lorsque $i \in J$.
Cela montre que la famille $(x_i)_{i\in I\cup J}$ est encore génératrice de E.

Définition 8

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si $\text{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = E$.

Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i, ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}.x_i$.

Proposition 7

S i $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, toute famille contenant les (x_i) (sur-famille) est encore une famille génératrice de E.

Démonstration

Soit $(x_i)_{i\in I\cup J}$ une famille contenant la précédente. Par hypothèse, tout vecteur $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ avec les λ_i presque tous nuls, donc s'écrit aussi $x = \sum_{i\in I\cup J} \lambda_i x_i$ en ayant posé $\lambda_i = 0$ lorsque $i \in J$.
Cela montre que la famille $(x_i)_{i\in I\cup J}$ est encore génératrice de E.

Plus rapidement : par définition du sous-espace vectoriel engendré, il est clair que, si A et B sont deux parties de E :

$$A \subset B \Longrightarrow \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$$

donc si A engendre E, on a $\text{Vect}(A) = E$ puis si B contient A on en déduit $\text{Vect}(B) \supset E$ soit $\text{Vect}(B) = E$ donc B engendre E.

Définition 8

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite générratrice de E si $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = E$.

Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i, ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}.x_i$.

Proposition 7

S i $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, toute famille contenant les (x_i) (sur-famille) est encore une famille génératrice de E.

Proposition 8

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, $i_0 \in I$ et $J = I - \{i_0\}$.

Alors : $(x_i)_{i\in J}$ est encore une famille génératrice de E si et seulement si x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in J}$.

Définition 8

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = E$.

Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i, ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}.x_i$.

Proposition 7

S i $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, toute famille contenant les (x_i) (sur-famille) est encore une famille génératrice de E.

Proposition 8

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, $i_0 \in I$ et $J = I - \{i_0\}$.

Alors : $(x_i)_{i\in J}$ est encore une famille génératrice de E si et seulement si x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in J}$.

Démonstration

- Si $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est génératrice, alors x_{i_0} est évidemment combinaison linéaire de cette famille !

Définition 8

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = E$.

Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i, ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}.x_i$.

Proposition 7

S i $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, toute famille contenant les (x_i) (sur-famille) est encore une famille génératrice de E.

Proposition 8

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, $i_0 \in I$ et $J = I - \{i_0\}$.

Alors : $(x_i)_{i\in J}$ est encore une famille génératrice de E si et seulement si x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in J}$.

Démonstration

- Si $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est génératrice, alors x_{i_0} est évidemment combinaison linéaire de cette famille !
- Réciproquement, supposons $(x_i)_{i\in I}$ génératrice et x_{i_0} combinaison linéaire des $(x_i)_{i\neq i_0}$. Alors tout $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ (somme finie) donc $x = \sum\limits_{i\neq i_0} \lambda_i x_i + \lambda_{i_0} x_{i_0}$ sera encore combinaison linéaire des $(x_i)_{i\neq i_0}$.

Définition 9

1. Une famille finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite libre si, pour toute famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

(on dit aussi que les (x_i) sont linéairement indépendants).

Définition 9

1. Une famille finie $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite libre si, pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$
(on dit aussi que les (x_i) sont linéairement indépendants).

2. Une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite libre si **toutes** ses sous-familles finies sont libres.
Cela équivaut à dire que, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ **à support fini**, la relation $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$ implique $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$ pour tout i.

Définition 9

1. Une famille finie $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite libre si, pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

(on dit aussi que les (x_i) sont linéairement indépendants).

2. Une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite libre si **toutes** ses sous-familles finies sont libres.

   Cela équivaut à dire que, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ **à support fini**, la relation $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$ implique $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$ pour tout i.

3. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, **non tous nuls**, telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$.

   (on dit aussi que les (x_i) sont linéairement dépendants).

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie $(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n})$ avec λ_i n réels distincts, est libre.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ avec λ_i n réels distincts, est libre.

Les λ_i étant distincts, on peut supposer $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Supposons alors qu'il existe des réels α_i tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{\lambda_i} = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E, c'est-à-dire l'application nulle) c'est-à-dire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i} = 0.$$

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ avec λ_i n réels distincts, est libre.

Les λ_i étant distincts, on peut supposer $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Supposons alors qu'il existe des réels α_i tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{\lambda_i} = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E, c'est-à-dire l'application nulle) c'est-à-dire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i} = 0.$$

Alors, en divisant par t^{λ_n} ($\neq 0$) :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t^{\lambda_i - \lambda_n} + \alpha_n = 0.$$

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie $(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n})$ avec λ_i n réels distincts, est libre.

Les λ_i étant distincts, on peut supposer $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Supposons alors qu'il existe des réels α_i tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_{\lambda_i} = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E, c'est-à-dire l'application nulle) c'est-à-dire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i} = 0.$$

Alors, en divisant par t^{λ_n} ($\neq 0$) :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t^{\lambda_i - \lambda_n} + \alpha_n = 0.$$

En faisant alors tendre t vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient (puisque $\lambda_i - \lambda_n < 0$), $\alpha_n = 0$.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ avec λ_i n réels distincts, est libre.

Les λ_i étant distincts, on peut supposer $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Supposons alors qu'il existe des réels α_i tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{\lambda_i} = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E, c'est-à-dire l'application nulle) c'est-à-dire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i} = 0.$$

Alors, en divisant par t^{λ_n} ($\neq 0$) :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t^{\lambda_i - \lambda_n} + \alpha_n = 0.$$

En faisant alors tendre t vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient (puisque $\lambda_i - \lambda_n < 0$), $\alpha_n = 0$.

Il suffit alors d'itérer le procédé (= faire une récurrence) pour démontrer que tous les α_i sont nuls, ce qui prouve la propriété énoncée (voir exemple suivant pour rédaction détaillée de la récurrence).

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda \colon t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n \colon t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre, et puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir propriétés ci-dessous), il suffit en fait de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est libre. Pour cela, procédons par récurrence sur n.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre, et puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir propriétés ci-dessous), il suffit en fait de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \ldots, e_n)$ est libre. Pour cela, procédons par récurrence sur n.

- Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisqu'une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre, et puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir propriétés ci-dessous), il suffit en fait de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \ldots, e_n)$ est libre. Pour cela, procédons par récurrence sur n.

- Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisqu'une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Supposons la propriété démontrée à l'ordre $n - 1$, c'est-à-dire $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ libre.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.
   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre, et puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir propriétés ci-dessous), il suffit en fait de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \ldots, e_n)$ est libre. Pour cela, procédons par récurrence sur n.

- Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisqu'une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Supposons la propriété démontrée à l'ordre $n - 1$, c'est-à-dire $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ libre.

  Si $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ sont des réels tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E, c'est-à-dire l'application nulle) alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k cos(kt) = 0 \quad (1)$,

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre, et puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir propriétés ci-dessous), il suffit en fait de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \ldots, e_n)$ est libre. Pour cela, procédons par récurrence sur n.

- Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisqu'une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Supposons la propriété démontrée à l'ordre $n - 1$, c'est-à-dire $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ libre.

  Si $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ sont des réels tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E, c'est-à-dire l'application nulle) alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k cos(kt) = 0 \quad (1)$, puis en dérivant 2 fois : $\sum_{k=0}^{n} k^2 \alpha_k \cos(kt) = 0 \quad (2)$.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre, et puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir propriétés ci-dessous), il suffit en fait de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \ldots, e_n)$ est libre. Pour cela, procédons par récurrence sur n.

- Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisqu'une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Supposons la propriété démontrée à l'ordre $n-1$, c'est-à-dire $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ libre.

  Si $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ sont des réels tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E, c'est-à-dire l'application nulle) alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k cos(kt) = 0 \quad (1)$, puis en dérivant 2 fois : $\sum_{k=0}^{n} k^2 \alpha_k \cos(kt) = 0 \quad (2)$.

  En calculant alors $n^2 \times (1) - (2)$, on obtient : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} (n^2 - k^2)\alpha_k \cos(kt) = 0$, d'où l'on tire, compte tenu de l'hypothèse de récurrence : $\forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!],\ (n^2 - k^2)\alpha_k = 0$ d'où $\alpha_k = 0$.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Démonstration

Conformément à la définition, il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre, et puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir propriétés ci-dessous), il suffit en fait de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est libre. Pour cela, procédons par récurrence sur n.

- Le résultat est immédiat pour $n = 0$, puisqu'une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Supposons la propriété démontrée à l'ordre $n-1$, c'est-à-dire $(e_0, \dots, e_{n-1})$ libre.

  Si $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont des réels tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k e_k = 0$ (0 désigne ici le vecteur nul de E, c'est-à-dire l'application nulle) alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k cos(kt) = 0 \quad (1)$, puis en dérivant 2 fois : $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \alpha_k \cos(kt) = 0 \quad (2)$.

  En calculant alors $n^2 \times (1) - (2)$, on obtient : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} (n^2 - k^2) \alpha_k \cos(kt) = 0$, d'où l'on tire, compte tenu de l'hypothèse de récurrence : $\forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!],\ (n^2 - k^2)\alpha_k = 0$ d'où $\alpha_k = 0$.
  La relation (1) implique alors aussi $\alpha_n = 0$. Les α_k sont donc tous nuls, ce qui démontre la propriété à l'ordre n et achève la récurrence.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration

Il suffit de le démontrer pour une famille finie, comme dans les exemples précédents.
Soit donc $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés distincts. Quitte à changer l'ordre, on peut supposer $\deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_n$.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration

Il suffit de le démontrer pour une famille finie, comme dans les exemples précédents.
Soit donc $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés distincts. Quitte à changer l'ordre, on peut supposer $\deg P_1 < \deg P_2 < \dots < \deg P_n$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0$, on a nécessairement $\lambda_n = 0$ car sinon,

$$\deg\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = \deg(\lambda_n P_n) = \deg(P_n) \neq -\infty.$$

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.

   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration

Il suffit de le démontrer pour une famille finie, comme dans les exemples précédents.
Soit donc $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés distincts. Quitte à changer l'ordre, on peut supposer $\deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_n$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0$, on a nécessairement $\lambda_n = 0$ car sinon,

$$\deg\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = \deg(\lambda_n P_n) = \deg(P_n) \neq -\infty.$$

D'où $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i P_i = 0$, et on recommence... (=récurrence). Ainsi, tous les λ_i sont nuls, cqfd.

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
   Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.
   Alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration

Il suffit de le démontrer pour une famille finie, comme dans les exemples précédents.
Soit donc $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés distincts. Quitte à changer l'ordre, on peut supposer $\deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_n$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0$, on a nécessairement $\lambda_n = 0$ car sinon,

$$\deg\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) = \deg(\lambda_n P_n) = \deg(P_n) \neq -\infty.$$

D'où $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i P_i = 0$, et on recommence... (=récurrence). Ainsi, tous les λ_i sont nuls, cqfd.

Ce résultat est à retenir, et peut être utilisé sans démonstration.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si **il existe** $j \in I$ tel que x_j soit combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.

   Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si **il existe** $j \in I$ tel que x_j soit combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.

   Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.

Démonstration

- Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée, il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, non tous nuls, telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$.

  Il existe un $\lambda_j \neq 0$ d'où : $x_j = -\sum_{i\neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i$, et x_j est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si **il existe** $j \in I$ tel que x_j soit combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.

   Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.

Démonstration

- Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée, il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, non tous nuls, telle que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$.

  Il existe un $\lambda_j \neq 0$ d'où : $x_j = -\sum\limits_{i\neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i$, et x_j est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.
- Réciproquement, s'il existe $j \in I$ tel que x_j est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\neq j}$, on a $x_j = \sum\limits_{i\neq j} \mu_i x_i$ où la famille $(\mu_i)_{i\neq j}$ est à support fini, donc on a la combinaison linéaire non triviale $x_j - \sum\limits_{i\neq j} \mu_i x_i = 0$, et la famille est liée.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si **il existe** $j \in I$ tel que x_j soit combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.
   Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.
7. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs **non nuls** de E. Alors cette famille est libre si et seulement si la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}x_i$ est directe.

Propriétés

1. La famille $\emptyset$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si **il existe** $j \in I$ tel que x_j soit combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.
   Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.
7. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs **non nuls** de E. Alors cette famille est libre si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}x_i$ est directe.

Démonstration

En effet, si la somme $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}x_i$ est directe et si l'on a des scalaires λ_i tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$, alors pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i x_i = 0$ par caractérisation d'une somme directe (théorème 4) donc tous les λ_i sont nuls puisque l'on a supposé les x_i non nuls. Réciproque similaire.

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée. Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Démonstration

Dire que la famille $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ est liée signifie :

Il existe une famille $\{\mu\} \cup \{\lambda_i \mid i \in I\}$ à support fini de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i + \mu y = 0$

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Démonstration

Dire que la famille $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ est liée signifie :
Il existe une famille $\{\mu\} \cup \{\lambda_i \mid i \in I\}$ à support fini de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i + \mu y = 0$
On ne peut pas avoir $\mu = 0$, sinon on aurait $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ d'où $\lambda_i = 0$ pour tout i, puisque $(x_i)_{i\in I}$ est libre, ce qui contredit l'hypothèse que les scalaires ne sont pas tous nuls.

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Démonstration

Dire que la famille $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ est liée signifie :
Il existe une famille $\{\mu\} \cup \{\lambda_i \mid i \in I\}$ à support fini de scalaires non tous nuls telle que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i + \mu y = 0$
On ne peut pas avoir $\mu = 0$, sinon on aurait $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ d'où $\lambda_i = 0$ pour tout i, puisque $(x_i)_{i\in I}$ est libre, ce qui contredit l'hypothèse que les scalaires ne sont pas tous nuls.
On a donc $y = -\frac{1}{\mu} \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$, et y est bien combinaison linéaires des $(x_i)_{i\in I}$.

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Démonstration

Dire que la famille $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ est liée signifie :
Il existe une famille $\{\mu\} \cup \{\lambda_i \mid i \in I\}$ à support fini de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i + \mu y = 0$
On ne peut pas avoir $\mu = 0$, sinon on aurait $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ d'où $\lambda_i = 0$ pour tout i, puisque $(x_i)_{i\in I}$ est libre, ce qui contredit l'hypothèse que les scalaires ne sont pas tous nuls.
On a donc $y = -\frac{1}{\mu} \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, et y est bien combinaison linéaires des $(x_i)_{i\in I}$.
Cette écriture est unique, puisque $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$ implique $\sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$ d'où $\lambda_i = \mu_i$ pour tout i puisque la famille est libre.

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Corollaire:

Une famille de deux éléments $\{x_1, x_2\}$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est liée si et seulement si :

$$x_1 = 0_E \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } x_2 = \lambda x_1.$$

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Corollaire:

Une famille de deux éléments $\{x_1, x_2\}$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est liée si et seulement si :

$$x_1 = 0_E \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } x_2 = \lambda x_1.$$

Démonstration

- Supposons la condition de l'énoncé réalisée.

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Corollaire:

> Une famille de deux éléments $\{x_1, x_2\}$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est liée si et seulement si :
> $$x_1 = 0_E \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } x_2 = \lambda x_1.$$

Démonstration

- Supposons la condition de l'énoncé réalisée.
  Alors si $x_1 = 0_E$, la famille $\{x_1, x_2\}$ est évidemment liée, et si $x_2 = \lambda x_1$ alors $1.x_2 - \lambda.x_1 = 0_E$ donc il existe une combinaison linéaire non triviale de x_1 et x_2 qui est égale à 0_E, donc $\{x_1, x_2\}$ est liées.

Proposition 9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

Corollaire:

> Une famille de deux éléments $\{x_1, x_2\}$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est liée si et seulement si :
> $$x_1 = 0_E \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } x_2 = \lambda x_1.$$

Démonstration

- Supposons la condition de l'énoncé réalisée.
  Alors si $x_1 = 0_E$, la famille $\{x_1, x_2\}$ est évidemment liée, et si $x_2 = \lambda x_1$ alors $1.x_2 - \lambda.x_1 = 0_E$ donc il existe une combinaison linéaire non triviale de x_1 et x_2 qui est égale à 0_E, donc $\{x_1, x_2\}$ est liées.
- La réciproque est un cas particulier de la proposition précédente, puisque lorsque $x_1 \neq 0_E$, la famille $\{x_1\}$ est libre.

Remarque : Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille liées, on sait qu'**il existe** un indice j tel que x_j soit combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, mais on ne sait pas lequel (ou lesquels) a priori.

La proposition précédente permet de préciser cela.

BASES

Définition 10

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée <u>base</u> de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Définition 10

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée <u>base</u> de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5

Pour une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Définition 10

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée <u>base</u> de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5

Pour une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Démonstration

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** : Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E.

Définition 10

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5

Pour une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Démonstration

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** : Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E.
  - $\mathscr{B}$ étant génératrice, tout vecteur de E s'écrit bien comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Définition 10

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée <u>base</u> de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5

Pour une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Démonstration

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** : Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E.
  - $\mathscr{B}$ étant génératrice, tout vecteur de E s'écrit bien comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.
  - et cette écriture est unique, car $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i\in I} \mu_i e_i \Longrightarrow \sum\limits_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i - \mu_i = 0$ pour tout i (car $\mathscr{B}$ est libre).

Définition 10

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5

Pour une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Démonstration

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** : Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E.
  - $\mathscr{B}$ étant génératrice, tout vecteur de E s'écrit bien comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.
  - et cette écriture est unique, car $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_i e_i \Longrightarrow \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i - \mu_i = 0$ pour tout i (car $\mathscr{B}$ est libre).
- **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** :

  Si **(ii)** est vérifiée, $\mathscr{B}$ est génératrice, et elle est libre car, par unicité de l'écriture,

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} 0 \cdot e_i \Longrightarrow \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i.$$

Définition 10

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée <u>base</u> de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5

Pour une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Remarque : Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de vecteurs **non nuls** de E, cette famille est une base de E si et seulement si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}e_i$.

Définition 10

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5

Pour une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Remarque : Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de vecteurs **non nuls** de E, cette famille est une base de E si et seulement si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}e_i$.

Définition 11

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Par définition, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$.

Les x_i sont appelés les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.
Les vecteurs $x_i e_i$ sont appelées les composantes de x dans cette base.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\emptyset$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\text{Vect}\left(\{\emptyset\}\right) = \{0\})$.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\emptyset$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\mathrm{Vect}\left(\{\emptyset\}\right) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $\dots$, $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\emptyset$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\mathrm{Vect}\left(\{\emptyset\}\right) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, ... , $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Démonstration

En effet tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ s'écrit de façon unique (compte tenu de la définition des lois dans l'espace vectoriel produit) sous la forme

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ .$$

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\{\emptyset\}$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\mathrm{Vect}\left(\{\emptyset\}\right) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $\dots$, $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.
3. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\{\emptyset\}$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\text{Vect}\left(\{\emptyset\}\right) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $\dots$, $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.
3. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

En effet tout polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

où les a_n sont nuls à partir d'un certain rang.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\{\emptyset\}$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\operatorname{Vect}\big(\{\emptyset\}\big) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $e_{n-1} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
3. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: elle est formée des vecteurs $1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n$.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\{\emptyset\}$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\mathrm{Vect}\left(\{\emptyset\}\right) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $e_{n-1} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
3. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: elle est formée des vecteurs $1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n$.
5. Il y a d'autres bases très utiles dans $\mathbb{K}_n[X]$:

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\{\emptyset\}$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\mathrm{Vect}\big(\{\emptyset\}\big) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $\dots$, $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.
3. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: elle est formée des vecteurs $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}, X^n$.
5. Il y a d'autres bases très utiles dans $\mathbb{K}_n[X]$:
   - Pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille des polynômes $(X-a)^k$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$. Cette famille peut être par exemple utilisée pour la démonstration de la formule de Taylor.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\{\emptyset\}$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\text{Vect}\left(\{\emptyset\}\right) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $e_{n-1} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
3. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: elle est formée des vecteurs $1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n$.
5. Il y a d'autres bases très utiles dans $\mathbb{K}_n[X]$:
   - Pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille des polynômes $(X-a)^k$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$. Cette famille peut être par exemple utilisée pour la démonstration de la formule de Taylor.
   - La famille des polynômes de Hilbert (ou de Newton) : ce sont les polynômes H_k pour $k \in [\![0\,;n]\!]$ définis par : $H_0 = 1$ et pour $k \geqslant 1$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}$.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\{\emptyset\}$ (en effet, la famille $\{\emptyset\}$ est libre et $\mathrm{Vect}\left(\{\emptyset\}\right) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, … , $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.
3. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: elle est formée des vecteurs $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}, X^n$.
5. Il y a d'autres bases très utiles dans $\mathbb{K}_n[X]$:
    - Pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille des polynômes $(X-a)^k$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$. Cette famille peut être par exemple utilisée pour la démonstration de la formule de Taylor.
    - La famille des polynômes de Hilbert (ou de Newton) : ce sont les polynômes H_k pour $k \in [\![0\,;n]\!]$ définis par : $H_0 = 1$ et pour $k \geqslant 1$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$.

(Le fait qu'il s'agit bien de bases de $\mathbb{K}_n[X]$ sera démontré un peu plus tard).

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$, $E_i=\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.

2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

Pour simplifier l'écriture, on se contentera de traiter le cas $n = 2$ (il suffirait ensuite de faire une simple récurrence sur n, compte tenu de l'associativité de la somme directe).

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

1. Supposons donc $E = E_1 \oplus E_2$, et soit $\mathscr{B}_i$ une base de E_i ($i = 1, 2$).

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

1. Supposons donc $E = E_1 \oplus E_2$, et soit $\mathscr{B}_i$ une base de E_i $(i = 1, 2)$.
   - Si $x \in \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$, alors $x \in E_1 \cap E_2$ d'où $x = 0$. Mais 0 ne peut appartenir à une base, donc $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset$.

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

1. Supposons donc $E = E_1 \oplus E_2$, et soit $\mathscr{B}_i$ une base de E_i ($i = 1, 2$).
   - Si $x \in \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$, alors $x \in E_1 \cap E_2$ d'où $x = 0$. Mais 0 ne peut appartenir à une base, donc $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset$.
   - Si $x \in E$, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$. Or, pour $i = 1, 2$, x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_i$, donc x s'écrira comme combinaison linéaires des vecteurs de $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i\in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i\in [\![1\,;n]\!]$, $E_i=\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

1. Supposons donc $E=E_1\oplus E_2$, et soit $\mathscr{B}_i$ une base de E_i ($i=1,2$).
   - Si $x\in\mathscr{B}_1\cap\mathscr{B}_2$, alors $x\in E_1\cap E_2$ d'où $x=0$. Mais 0 ne peut appartenir à une base, donc $\mathscr{B}_1\cap\mathscr{B}_2=\emptyset$.
   - Si $x\in E$, on peut écrire $x=x_1+x_2$ avec $x_i\in E_i$. Or, pour $i=1,2$, x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_i$, donc x s'écrira comme combinaison linéaires des vecteurs de $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est génératrice de E.
   - Posons $\mathscr{B}_1=(e_i)_{i\in I_1}$ et $\mathscr{B}_2=(e_i)_{i\in I_2}$ avec $I_1\cap I_2=\emptyset$, de sorte que $\mathscr{B}=(e_i)_{i\in I_1\cup I_2}$. Il reste à démontrer que $\mathscr{B}$ est libre.

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

1. Supposons donc $E = E_1 \oplus E_2$, et soit $\mathscr{B}_i$ une base de E_i ($i = 1, 2$).
   - Si $x \in \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$, alors $x \in E_1 \cap E_2$ d'où $x = 0$. Mais 0 ne peut appartenir à une base, donc $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset$.
   - Si $x \in E$, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$. Or, pour $i = 1, 2$, x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_i$, donc x s'écrira comme combinaison linéaires des vecteurs de $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est génératrice de E.
   - Posons $\mathscr{B}_1 = (e_i)_{i\in I_1}$ et $\mathscr{B}_2 = (e_i)_{i\in I_2}$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, de sorte que $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I_1\cup I_2}$. Il reste à démontrer que $\mathscr{B}$ est libre.
     Or, si on a $\sum_{i\in I_1\cup I_2} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{i\in I_1} \lambda_i e_i = -\sum_{i\in I_2} \lambda_i e_i \in E_1 \cap E_2$, donc $\sum_{i\in I_1} \lambda_i e_i = 0$ puis $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I_1$ puisque $\mathscr{B}_1$ est libre, et, de même, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I_2$.

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.

2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

2. On reprend les hypothèses et notations de l'énoncé, avec $i \in \{1, 2\}$. Posons encore $\mathscr{B}_1 = (e_i)_{i \in I_1}$ et $\mathscr{B}_2 = (e_i)_{i \in I_2}$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, de sorte que $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I_1 \cup I_2}$.

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{B}_i$ est une base de E.

2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$, $E_i=\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E=\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

2. On reprend les hypothèses et notations de l'énoncé, avec $i\in\{1,2\}$. Posons encore $\mathscr{B}_1=(e_i)_{i\in I_1}$ et $\mathscr{B}_2=(e_i)_{i\in I_2}$ avec $I_1\cap I_2=\emptyset$, de sorte que $\mathscr{B}=(e_i)_{i\in I_1\cup I_2}$.

   - $\mathscr{B}$ étant une base de E, tout vecteur x de E s'écrit
   $$x=\sum_{i\in I_1\cup I_2}\lambda_i e_i=\underbrace{\sum_{i\in I_1}\lambda_i e_i}_{=x_1}+\underbrace{\sum_{i\in I_2}\lambda_i e_i}_{=x_2}$$
   avec $x_1\in E_1$, $x_2\in E_2$, d'où $E=E_1+E_2$.

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Démonstration

2. On reprend les hypothèses et notations de l'énoncé, avec $i \in \{1,2\}$. Posons encore $\mathscr{B}_1 = (e_i)_{i\in I_1}$ et $\mathscr{B}_2 = (e_i)_{i\in I_2}$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, de sorte que $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I_1\cup I_2}$.
   - $\mathscr{B}$ étant une base de E, tout vecteur x de E s'écrit
   $$x = \sum_{i\in I_1\cup I_2} \lambda_i e_i = \underbrace{\sum_{i\in I_1} \lambda_i e_i}_{=x_1} + \underbrace{\sum_{i\in I_2} \lambda_i e_i}_{=x_2}$$
   avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, d'où $E = E_1 + E_2$.
   - Si $x \in E_1 \cap E_2$, il existe des scalaires λ_i, μ_i tels que $x = \sum_{i\in I_1} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I_2} \mu_i e_i$, d'où $\sum_{i\in I_1\cup I_2} \nu_i e_i = 0$ avec $\nu_i = \lambda_i$ pour $i \in I_1$ et $\nu_i = -\mu_i$ pour $i \in I_2$.
   $\mathscr{B}$ étant libre, on en déduit $\nu_i = 0$ pour tout i, d'où $x = 0$. Ainsi, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Théorème 6: *Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Définition 12

On dit que $(\mathscr{B}_i)_{i\in I}$ est une famille de bases adaptée à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

   En effet, sinon, il serait engendré par une famille finie de polynômes $(P_1, \dots, P_n)$; tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ devrait être combinaison linéaire des P_i, donc de degré inférieur à $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(P_i)$.

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

   En effet, sinon, il serait engendré par une famille finie de polynômes $(P_1, \dots, P_n)$; tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ devrait être combinaison linéaire des P_i, donc de degré inférieur à $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \deg(P_i)$.

Proposition 10

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice de E on peut extraire une famille génératrice finie.

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

   En effet, sinon, il serait engendré par une famille finie de polynômes $(P_1, \ldots, P_n)$; tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ devrait être combinaison linéaire des P_i, donc de degré inférieur à $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(P_i)$.

Proposition 10

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice de E on peut extraire une famille génératrice finie.

Démonstration

Par hypothèse, E est engendré par une famille finie : $E = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$.

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

   En effet, sinon, il serait engendré par une famille finie de polynômes $(P_1, \ldots, P_n)$; tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ devrait être combinaison linéaire des P_i, donc de degré inférieur à $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(P_i)$.

Proposition 10

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice de E on peut extraire une famille génératrice finie.

Démonstration

Par hypothèse, E est engendré par une famille finie : $E = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$.
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une partie génératrice de E. Tout y_j peut donc s'écrire comme combinaison linéaire (finie) des vecteurs de cette famille :

$$y_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_{ji} x_i \quad \text{où } I_j \text{ est une partie finie de } I$$

donc les y_j appartiennent tous à $\mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n\})$.

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

   En effet, sinon, il serait engendré par une famille finie de polynômes $(P_1, \ldots, P_n)$; tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ devrait être combinaison linéaire des P_i, donc de degré inférieur à $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(P_i)$.

Proposition 10

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice de E on peut extraire une famille génératrice finie.

Démonstration

Par hypothèse, E est engendré par une famille finie : $E = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$.
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une partie génératrice de E. Tout y_j peut donc s'écrire comme combinaison linéaire (finie) des vecteurs de cette famille :

$$y_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_{ji} x_i \quad \text{où } I_j \text{ est une partie finie de } I$$

donc les y_j appartiennent tous à $\text{Vect}(\{x_i, i \in I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n\})$.
E étant engendré par les y_j est donc aussi engendré par $\{x_i, i \in I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n\}$, qui est bien une famille finie extraite de $(x_i)_{i \in I}$.

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

   En effet, sinon, il serait engendré par une famille finie de polynômes $(P_1, \ldots, P_n)$; tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ devrait être combinaison linéaire des P_i, donc de degré inférieur à $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(P_i)$.

Proposition 10

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice de E on peut extraire une famille génératrice finie.

Théorème 7

Si E est engendré par une famille de cardinal n, toute famille possédant au moins $n+1$ vecteurs est liée. (soit encore : toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n).

Démonstration

Supposons $E = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Procédons par récurrence sur n :

Démonstration

Supposons $E = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Procédons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $E = \mathrm{Vect}(y)$ et, si $x_1 \neq x_2 \in E$, il existe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $x_1 = \lambda_1 y$ et $x_2 = \lambda_2 y$, d'où $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$ et $\{x_1, x_2\}$ est liée (λ_1 et λ_2 ne pouvant être tous les 2 nuls puisque distincts).

Démonstration

Supposons $E = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Procédons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $E = \text{Vect}(y)$ et, si $x_1 \neq x_2 \in E$, il existe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $x_1 = \lambda_1 y$ et $x_2 = \lambda_2 y$, d'où $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$ et $\{x_1, x_2\}$ est liée (λ_1 et λ_2 ne pouvant être tous les 2 nuls puisque distincts).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$. Soit alors $E = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$, et $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$.
  Il existe des scalaires λ_{ij} tels que :
  $$\forall i \in [\![1\,;n+1]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j \quad (*)$$

Démonstration

Supposons $E = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Procédons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $E = \text{Vect}(y)$ et, si $x_1 \neq x_2 \in E$, il existe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $x_1 = \lambda_1 y$ et $x_2 = \lambda_2 y$, d'où $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$ et $\{x_1, x_2\}$ est liée (λ_1 et λ_2 ne pouvant être tous les 2 nuls puisque distincts).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$. Soit alors $E = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$, et $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$.

  Il existe des scalaires λ_{ij} tels que :

  $$\forall i \in [\![1\,;n+1]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j \quad (*)$$

  - Si tous les λ_{ij} sont nuls, alors tous les x_i sont nuls, et la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée !

Démonstration

Supposons $E = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Procédons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $E = \mathrm{Vect}(y)$ et, si $x_1 \neq x_2 \in E$, il existe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $x_1 = \lambda_1 y$ et $x_2 = \lambda_2 y$, d'où $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$ et $\{x_1, x_2\}$ est liée (λ_1 et λ_2 ne pouvant être tous les 2 nuls puisque distincts).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$. Soit alors $E = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$, et $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$.
  Il existe des scalaires λ_{ij} tels que :
  $$\forall i \in [\![1\,;n+1]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j \quad (*)$$
  - Si tous les λ_{ij} sont nuls, alors tous les x_i sont nuls, et la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée !
  - Sinon, il existe au moins un des λ_{ij} qui est non nul, par exemple λ_{11} (quitte à changer l'ordre des vecteurs, pour simplifier les notations). On utilise alors la **méthode du pivot** :

Démonstration

Supposons $E = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Procédons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $E = \mathrm{Vect}(y)$ et, si $x_1 \neq x_2 \in E$, il existe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $x_1 = \lambda_1 y$ et $x_2 = \lambda_2 y$, d'où $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$ et $\{x_1, x_2\}$ est liée (λ_1 et λ_2 ne pouvant être tous les 2 nuls puisque distincts).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$. Soit alors $E = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$, et $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$.

  Il existe des scalaires λ_{ij} tels que :
  $$\forall i \in [\![1\,;n+1]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j \quad (*)$$
  - Si tous les λ_{ij} sont nuls, alors tous les x_i sont nuls, et la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée !
  - Sinon, il existe au moins un des λ_{ij} qui est non nul, par exemple λ_{11} (quitte à changer l'ordre des vecteurs, pour simplifier les notations). On utilise alors la **méthode du pivot** :

    Dans le système $(*)$, on effectue les opérations $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} L_1$ pour $i \in [\![2\,;n+1]\!]$. On obtient :
    $$\forall i \in [\![2\,;n+1]\!],\ x_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1 = \sum_{j=2}^{n} \left(\lambda_{ij} - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} \lambda_{1j}\right) y_j$$

Démonstration

Supposons $E = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Procédons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $E = \text{Vect}(y)$ et, si $x_1 \neq x_2 \in E$, il existe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $x_1 = \lambda_1 y$ et $x_2 = \lambda_2 y$, d'où $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$ et $\{x_1, x_2\}$ est liée (λ_1 et λ_2 ne pouvant être tous les 2 nuls puisque distincts).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$. Soit alors $E = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$, et $x_1, \ldots, x_{n+1} \in E$.

  Il existe des scalaires λ_{ij} tels que :
$$\forall i \in [\![1\,;n+1]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j \quad (*)$$
  - Si tous les λ_{ij} sont nuls, alors tous les x_i sont nuls, et la famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est liée !
  - Sinon, il existe au moins un des λ_{ij} qui est non nul, par exemple λ_{11} (quitte à changer l'ordre des vecteurs, pour simplifier les notations). On utilise alors la **méthode du pivot** :

    Dans le système $(*)$, on effectue les opérations $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} L_1$ pour $i \in [\![2\,;n+1]\!]$. On obtient :
$$\forall i \in [\![2\,;n+1]\!],\ x_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1 = \sum_{j=2}^{n} \left(\lambda_{ij} - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} \lambda_{1j}\right) y_j$$
    Ainsi, les vecteurs $x_i - \dfrac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1$ pour $i \in [\![2\,;n+1]\!]$ forment-ils un système de n vecteurs de $\text{Vect}\underbrace{(y_2, \ldots, y_n)}_{n-1 \text{ vecteurs}}$.

    D'après l'hypothèse de récurrence, ils sont liés. Il existe donc des scalaires $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \left(x_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1\right) = 0$

Démonstration

Supposons $E = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Puisque toute famille contenant une famille liée est elle aussi liée, il suffit, pour démontrer le théorème, de montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Procédons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $E = \mathrm{Vect}(y)$ et, si $x_1 \neq x_2 \in E$, il existe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $x_1 = \lambda_1 y$ et $x_2 = \lambda_2 y$, d'où $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$ et $\{x_1, x_2\}$ est liée (λ_1 et λ_2 ne pouvant être tous les 2 nuls puisque distincts).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$. Soit alors $E = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$, et $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$.

  Il existe des scalaires λ_{ij} tels que :
  $$\forall i \in [\![1\,;n+1]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j \quad (*)$$
  - Si tous les λ_{ij} sont nuls, alors tous les x_i sont nuls, et la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée !
  - Sinon, il existe au moins un des λ_{ij} qui est non nul, par exemple λ_{11} (quitte à changer l'ordre des vecteurs, pour simplifier les notations). On utilise alors la **méthode du pivot** :

    Dans le système $(*)$, on effectue les opérations $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} L_1$ pour $i \in [\![2\,;n+1]\!]$. On obtient :
    $$\forall i \in [\![2\,;n+1]\!],\ x_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1 = \sum_{j=2}^{n} \left(\lambda_{ij} - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} \lambda_{1j}\right) y_j$$
    Ainsi, les vecteurs $x_i - \dfrac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1$ pour $i \in [\![2\,;n+1]\!]$ forment-ils un système de n vecteurs de $\mathrm{Vect}\,\underbrace{(y_2, \dots, y_n)}_{n-1 \text{ vecteurs}}$.

    D'après l'hypothèse de récurrence, ils sont liés. Il existe donc des scalaires $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \left(x_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} x_1\right) = 0$

    et, en développant cette expression, on obtient une combinaison linéaire des $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ qui vaut 0 et à coefficients non tous nuls, donc la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée, ce qui achève la récurrence.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E.
Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Démonstration

- $\mathcal{L}$ est de cardinal fini d'après le théorème précédent

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Démonstration

- $\mathcal{L}$ est de cardinal fini d'après le théorème précédent
- On considère alors l'ensemble X de toutes les familles libres B telles que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Démonstration

- $\mathcal{L}$ est de cardinal fini d'après le théorème précédent
- On considère alors l'ensemble X de toutes les familles libres B telles que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.
    - $X \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{L} \in X$.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Démonstration

- $\mathcal{L}$ est de cardinal fini d'après le théorème précédent
- On considère alors l'ensemble X de toutes les familles libres B telles que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.
  - $X \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{L} \in X$.
  - Si E est engendré par n vecteurs, les éléments de X sont tous de cardinal $\leqslant n$ d'après le th. précédent. L'ensemble des cardinaux des éléments de X est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus grand élément, i.e qu'il existe dans X un élément de cardinal maximum. Notons $\mathscr{B}$ un tel élément, et montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Démonstration

- $\mathcal{L}$ est de cardinal fini d'après le théorème précédent
- On considère alors l'ensemble X de toutes les familles libres B telles que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.
  - $X \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{L} \in X$.
  - Si E est engendré par n vecteurs, les éléments de X sont tous de cardinal $\leqslant n$ d'après le th. précédent. L'ensemble des cardinaux des éléments de X est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus grand élément, i.e qu'il existe dans X un élément de cardinal maximum. Notons $\mathscr{B}$ un tel élément, et montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E.
    - $\mathscr{B}$ est libre par construction : $\mathscr{B} \in X$.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Démonstration

- $\mathcal{L}$ est de cardinal fini d'après le théorème précédent
- On considère alors l'ensemble X de toutes les familles libres B telles que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.
  - $X \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{L} \in X$.
  - Si E est engendré par n vecteurs, les éléments de X sont tous de cardinal $\leqslant n$ d'après le th. précédent. L'ensemble des cardinaux des éléments de X est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus grand élément, i.e qu'il existe dans X un élément de cardinal maximum. Notons $\mathscr{B}$ un tel élément, et montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E.
    - $\mathscr{B}$ est libre par construction : $\mathscr{B} \in X$.
    - Soit $x \in \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ et $x \notin \mathscr{B}$. Alors $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \cup \{x\} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, et, puisque $\operatorname{card}(\mathscr{B} \cup \{x\}) > \operatorname{card}(\mathscr{B})$, $\mathscr{B} \cup \{x\}$ est liée.
      $\mathscr{B}$ étant libre, on en déduit que $x \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E.
Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Démonstration

- $\mathcal{L}$ est de cardinal fini d'après le théorème précédent
- On considère alors l'ensemble X de toutes les familles libres B telles que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.
  - $X \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{L} \in X$.
  - Si E est engendré par n vecteurs, les éléments de X sont tous de cardinal $\leqslant n$ d'après le th. précédent. L'ensemble des cardinaux des éléments de X est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus grand élément, i.e qu'il existe dans X un élément de cardinal maximum. Notons $\mathscr{B}$ un tel élément, et montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E.
    - $\mathscr{B}$ est libre par construction : $\mathscr{B} \in X$.
    - Soit $x \in \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ et $x \notin \mathscr{B}$. Alors $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \cup \{x\} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, et, puisque $\operatorname{card}(\mathscr{B} \cup \{x\}) > \operatorname{card}(\mathscr{B})$, $\mathscr{B} \cup \{x\}$ est liée.
      $\mathscr{B}$ étant libre, on en déduit que $x \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$.
      Cela reste évidemment vrai si $x \in \mathscr{B}$, donc, finalement, tout vecteur x de $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ appartient à $\operatorname{Vect}(\mathscr{B})$. Donc $\underbrace{\operatorname{Vect}(\mathcal{L} \cup \mathcal{G})}_{=E,\text{ car } \mathcal{G} \text{ gén.}} \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$, puis $E = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$: $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
> Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
> Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Démonstration

prendre $\mathcal{G} = E$ dans le théorème précédent.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E.
Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
> Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute système générateur de E, on peut extraire une base.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
> Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute système générateur de E, on peut extraire une base.

Démonstration

prendre $\mathcal{L} = \emptyset$ dans le théorème précédent.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E.
Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Corollaire:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute système générateur de E, on peut extraire une base.

Corollaire:

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une base.

(si $E = \{0_E\}$, une base de E est $\{\emptyset\}$).

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
> Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute système générateur de E, on peut extraire une base.

Corollaire:

> Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une base.
>
> (si $E = \{0_E\}$, une base de E est $\{\emptyset\}$).

Théorème 9: *de la dimension*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E.
Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
> Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute système générateur de E, on peut extraire une base.

Corollaire:

> Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une base.
>
> (si $E = \{0_E\}$, une base de E est $\{\emptyset\}$).

Théorème 9: *de la dimension*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Démonstration

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. En utilisant le théorème 7, on a

- $\mathscr{B}'$ génératrice et $\mathscr{B}$ libre $\Longrightarrow \operatorname{card}(\mathscr{B}) \leqslant \operatorname{card}(\mathscr{B}')$
- $\mathscr{B}$ génératrice et $\mathscr{B}'$ libre $\Longrightarrow \operatorname{card}(\mathscr{B}') \leqslant \operatorname{card}(\mathscr{B})$

d'où l'égalité $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = \operatorname{card}(\mathscr{B}')$.

Théorème 8: *de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E. Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
> Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute système générateur de E, on peut extraire une base.

Corollaire:

> Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une base.
>
> (si $E = \{0_E\}$, une base de E est $\{\emptyset\}$).

Théorème 9: *de la dimension*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Définition 14

Ce nombre d'éléments commun s'appelle la <u>dimension</u> de E, notée $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Démonstration

1. Soit L une famille libre de E.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Démonstration

1. Soit L une famille libre de E.
   - $\text{card}(L) \leqslant n$ a déjà été fait.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Démonstration

1. Soit L une famille libre de E.
   - $\text{card}(L) \leqslant n$ a déjà été fait.
   - Si $\text{card}(L) = n$ et si $x \notin L$, $\text{card}\left(L \cup \{x\}\right) = n+1$ donc $L \cup \{x\}$ est liée donc x est combinaison linéaire des vecteurs de L. Cette propriété reste évidemment vraie si $x \in L$, et finalement L engendre E : L est une famille génératrice, c'est donc une base de E.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Démonstration

1. Soit L une famille libre de E.
   - $\text{card}(L) \leqslant n$ a déjà été fait.
   - Si $\text{card}(L) = n$ et si $x \notin L$, $\text{card}\left(L \cup \{x\}\right) = n+1$ donc $L \cup \{x\}$ est liée donc x est combinaison linéaire des vecteurs de L. Cette propriété reste évidemment vraie si $x \in L$, et finalement L engendre E : L est une famille génératrice, c'est donc une base de E.
2. Soit G une famille génératrice de E.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Démonstration

1. Soit L une famille libre de E.
   - $\text{card}(L) \leqslant n$ a déjà été fait.
   - Si $\text{card}(L) = n$ et si $x \notin L$, $\text{card}\,(L \cup \{x\}) = n+1$ donc $L \cup \{x\}$ est liée donc x est combinaison linéaire des vecteurs de L. Cette propriété reste évidemment vraie si $x \in L$, et finalement L engendre E : L est une famille génératrice, c'est donc une base de E.
2. Soit G une famille génératrice de E.
   - D'après un résultat précédent, on peut extraire de G une base. Comme toutes les bases de E sont de cardinal n, on a $\text{card}(G) \geqslant n$.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Démonstration

1. Soit L une famille libre de E.
   - $\text{card}(L) \leqslant n$ a déjà été fait.
   - Si $\text{card}(L) = n$ et si $x \notin L$, $\text{card}\left(L \cup \{x\}\right) = n+1$ donc $L \cup \{x\}$ est liée donc x est combinaison linéaire des vecteurs de L. Cette propriété reste évidemment vraie si $x \in L$, et finalement L engendre E : L est une famille génératrice, c'est donc une base de E.
2. Soit G une famille génératrice de E.
   - D'après un résultat précédent, on peut extraire de G une base. Comme toutes les bases de E sont de cardinal n, on a $\text{card}(G) \geqslant n$.
   - Si G a exactement n éléments et si $x \in G$, alors $G \setminus \{x\}$ n'est pas génératrice (car de cardinal $< n$). x ne peut donc pas être combinaison linéaire des éléments de $G \setminus \{x\}$ d'après la proposition 8. G est donc aussi une famille libre (aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres) et c'est une base.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

En effet une telle famille est libre (déjà vu), et elle est formée de $n+1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $n+1$.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Plus généralement, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Plus généralement, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Ce résultat n'est pas si immédiat et sa démonstration doit être connue.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Plus généralement, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Ce résultat n'est pas si immédiat et sa démonstration doit être connue.

Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, elle est libre (déjà vu). De plus, d'après le résultat précédent, pour tout entier n, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Plus généralement, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Ce résultat n'est pas si immédiat et sa démonstration doit être connue.

Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, elle est libre (déjà vu). De plus, d'après le résultat précédent, pour tout entier n, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Donc si P est un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$, puisqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{K}_n[X]$, P sera combinaison linéaire des $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, donc la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$ et finalement c'en est une base.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Plus généralement, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.
3. Toute famille de polynômes de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemples

$\dim(\{0\}) = 0$: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Plus généralement, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.
3. Toute famille de polynômes de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Rappelons que la **valuation** d'un polynôme P non nul, notée $\mathrm{val}(P)$, est le plus grand entier i tel que X^i divise P (autrement dit, c'est le degré du terme de plus bas degré de P, ou encore l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P). Lorsque $P = 0$ on pose $\mathrm{val}(0) = +\infty$.

3. Toute famille de polynômes de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

Soient donc $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes tels que $\mathrm{val}(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.

3. Toute famille de polynômes de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

Soient donc $P_0, P_1, \ldots, P_n$ des polynômes tels que $\mathrm{val}(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$.
Il y a $n+1$ polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n+1$ donc pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ il suffit de montrer que cette famille est libre.

3 Toute famille de polynômes de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

Soient donc $P_0, P_1, \ldots, P_n$ des polynômes tels que $\mathrm{val}(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.
Il y a $n+1$ polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n+1$ donc pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soient donc $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$.

3 Toute famille de polynômes de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

Soient donc $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes tels que $\mathrm{val}(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.
Il y a $n+1$ polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n+1$ donc pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soient donc $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$.

En évaluant ce polynôme en 0 on obtient $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(0) = 0$, et puisque $P_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$ (les P_k pour $k \geqslant 1$ sont de valuations $\geqslant 1$ donc divisibles par X) et puisque $P_0(0) \neq 0$ (car P_0 de valuation nulle signifie qu'il n'est pas divisible par X), on trouve $\lambda_0 = 0$.

3 Toute famille de polynômes de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

Soient donc $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes tels que $\operatorname{val}(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.
Il y a $n+1$ polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n+1$ donc pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soient donc $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$.

En évaluant ce polynôme en 0 on obtient $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(0) = 0$, et puisque $P_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$ (les P_k pour $k \geqslant 1$ sont de valuations $\geqslant 1$ donc divisibles par X) et puisque $P_0(0) \neq 0$ (car P_0 de valuation nulle signifie qu'il n'est pas divisible par X), on trouve $\lambda_0 = 0$.
On a donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k = 0$ puis en dérivant : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k' = 0$. Chaque polynôme P_k' pour $k \geqslant 1$ est de valuation $k-1$ (car si 0 est racine d'ordre i d'un polynôme P, il est racine d'ordre $i-1$ de P'), donc en évaluant de nouveau en 0 on trouve $\lambda_1 = 0$ etc... (=récurrence, à rédiger pour les puristes).

3. Toute famille de polynômes de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

Soient donc $P_0, P_1, \ldots, P_n$ des polynômes tels que $\mathrm{val}(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$.
Il y a $n+1$ polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n+1$ donc pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soient donc $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$.

En évaluant ce polynôme en 0 on obtient $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(0) = 0$, et puisque $P_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$ (les P_k pour $k \geqslant 1$ sont de valuations $\geqslant 1$ donc divisibles par X) et puisque $P_0(0) \neq 0$ (car P_0 de valuation nulle signifie qu'il n'est pas divisible par X), on trouve $\lambda_0 = 0$.

On a donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k = 0$ puis en dérivant : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k' = 0$. Chaque polynôme P_k' pour $k \geqslant 1$ est de valuation $k-1$ (car si 0 est racine d'ordre i d'un polynôme P, il est racine d'ordre $i-1$ de P'), donc en évaluant de nouveau en 0 on trouve $\lambda_1 = 0$ etc... (=récurrence, à rédiger pour les puristes).

On démontre ainsi que tous les λ_k sont nuls, cqfd.

Théorème 11: *Dimension d'un espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est de dimension finie et $\dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

Théorème 11: *Dimension d'un espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est de dimension finie et $\mathsf{dim}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{dim}(E_i)$.

Démonstration

Il suffit bien sûr de le démontrer pour $n = 2$ (ensuite, récurrence immédiate).

Théorème 11: *Dimension d'un espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est de dimension finie et $\dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

Démonstration

Il suffit bien sûr de le démontrer pour $n = 2$ (ensuite, récurrence immédiate).

Dans ce cas, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E_1 et $(f_1, \dots, f_q)$ est une base de E_2, on vérifie aisément que la famille

$$\mathscr{B} = \big((e_1, 0), (e_2, 0) \dots, (e_p, 0), (0, f_1), (0, f_2), \dots, (0, f_q)\big)$$

est une base de $E_1 \times E_2$.

Théorème 11: *Dimension d'un espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est de dimension finie et $\dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

Démonstration

Il suffit bien sûr de le démontrer pour $n = 2$ (ensuite, récurrence immédiate).

Dans ce cas, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E_1 et $(f_1, \ldots, f_q)$ est une base de E_2, on vérifie aisément que la famille

$$\mathscr{B} = \big((e_1, 0), (e_2, 0) \ldots, (e_p, 0), (0, f_1), (0, f_2), \ldots, (0, f_q)\big)$$

est une base de $E_1 \times E_2$.

En effet, soit (x, y) un vecteur de $E_1 \times E_2$. Il existe des scalaires λ_i et μ_j tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j \, .$$

On aura alors : $(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j (0, f_j)$, ce qui montre que la famille $\mathscr{B}$ est génératrice de $E_1 \times E_2$.

Théorème 11: *Dimension d'un espace vectoriel produit*

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est de dimension finie et $\dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

Démonstration

Il suffit bien sûr de le démontrer pour $n = 2$ (ensuite, récurrence immédiate).

Dans ce cas, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E_1 et $(f_1, \dots, f_q)$ est une base de E_2, on vérifie aisément que la famille

$$\mathscr{B} = \big((e_1, 0), (e_2, 0) \dots, (e_p, 0), (0, f_1), (0, f_2), \dots, (0, f_q)\big)$$

est une base de $E_1 \times E_2$.

En effet, soit (x, y) un vecteur de $E_1 \times E_2$. Il existe des scalaires λ_i et μ_j tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j \, .$$

On aura alors : $(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j (0, f_j)$, ce qui montre que la famille $\mathscr{B}$ est génératrice de $E_1 \times E_2$.

Le fait que cette famille est libre est tout aussi immédiat, car si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j (0, f_j) = 0_{E_1 \times E_2} = (0_{E_1}, 0_{E_2})$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0$, donc tous les λ_i et μ_j sont nuls.

SOUS-ESPACES VECTORIELS D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Démonstration

1. On considère l'ensemble des systèmes libres de F (il en existe au moins un, $\emptyset$). Ce sont aussi des systèmes libres de E, donc leur cardinal est majoré par $\dim E$ et il existe donc dans F un système libre de cardinal maximum.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Démonstration

1. On considère l'ensemble des systèmes libres de F (il en existe au moins un, $\emptyset$). Ce sont aussi des systèmes libres de E, donc leur cardinal est majoré par $\dim E$ et il existe donc dans F un système libre de cardinal maximum.

   Notons-le $\mathscr{B}$. Si x est un élément de F qui n'appartient pas à $\mathscr{B}$, $\mathscr{B} \cup \{x\}$ est lié par définition. D'après la proposition 9, x est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$, donc $\mathscr{B}$ est aussi génératrice de F, et c'est donc une base de F ; par suite, F est de dimension finie.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Démonstration

1. On considère l'ensemble des systèmes libres de F (il en existe au moins un, $\emptyset$). Ce sont aussi des systèmes libres de E, donc leur cardinal est majoré par $\dim E$ et il existe donc dans F un système libre de cardinal maximum.

   Notons-le $\mathscr{B}$. Si x est un élément de F qui n'appartient pas à $\mathscr{B}$, $\mathscr{B} \cup \{x\}$ est lié par définition. D'après la proposition 9, x est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$, donc $\mathscr{B}$ est aussi génératrice de F, et c'est donc une base de F ; par suite, F est de dimension finie.

   De plus, on a directement $\text{card}(\mathscr{B}) \leqslant \dim E$ soit $\dim F \leqslant \dim E$.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Démonstration

1. On considère l'ensemble des systèmes libres de F (il en existe au moins un, $\emptyset$). Ce sont aussi des systèmes libres de E, donc leur cardinal est majoré par $\dim E$ et il existe donc dans F un système libre de cardinal maximum.

   Notons-le $\mathscr{B}$. Si x est un élément de F qui n'appartient pas à $\mathscr{B}$, $\mathscr{B} \cup \{x\}$ est lié par définition. D'après la proposition 9, x est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$, donc $\mathscr{B}$ est aussi génératrice de F, et c'est donc une base de F ; par suite, F est de dimension finie.

   De plus, on a directement $\operatorname{card}(\mathscr{B}) \leqslant \dim E$ soit $\dim F \leqslant \dim E$.

2. Si $\dim E = \dim F$ et si $\mathscr{B}$ est une base de F, c'est aussi une partie libre de E. Ayant $\dim E$ éléments, c'est donc aussi une base de E d'où $\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = F = E$.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous-espace vectoriel de E possède (au moins) un supplémentaire.
2. Si $E = E_1 \oplus E_2$, $\dim(E)=\dim(E_1)+\dim(E_2)$.
3. $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si la réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2 est une base de E.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous-espace vectoriel de E possède (au moins) un supplémentaire.
2. Si $E = E_1 \oplus E_2$, $\dim(E)=\dim(E_1)+\dim(E_2)$.
3. $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si la réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2 est une base de E.

Démonstration

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F étant de dimension finie possède une base $\mathscr{B}_1$. $\mathscr{B}_1$ est une famille libre de E donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille $\mathscr{B}_2$ telle que $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ soit une base de E.

   Si on pose alors $G = \text{Vect}(\mathscr{B}_2)$, on a $E = F \oplus G$ d'aprèsl e théorème 6 : G est un supplémentaire de F.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous-espace vectoriel de E possède (au moins) un supplémentaire.
2. Si $E = E_1 \oplus E_2$, $\dim(E)=\dim(E_1)+\dim(E_2)$.
3. $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si la réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2 est une base de E.

Démonstration

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F étant de dimension finie possède une base $\mathscr{B}_1$. $\mathscr{B}_1$ est une famille libre de E donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille $\mathscr{B}_2$ telle que $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ soit une base de E.

   Si on pose alors $G = \text{Vect}(\mathscr{B}_2)$, on a $E = F \oplus G$ d'aprèsl e théorème 6 : G est un supplémentaire de F.

2. Avec les mêmes notations, on a
$$\dim E = \text{card}\left(\mathscr{B}_1\right) \cup \mathscr{B}_2\right) = \text{card}(\mathscr{B}_1) + \text{card}(\mathscr{B}_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous-espace vectoriel de E possède (au moins) un supplémentaire.
2. Si $E = E_1 \oplus E_2$, $\dim(E)=\dim(E_1)+\dim(E_2)$.
3. $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si la réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2 est une base de E.

Démonstration

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F étant de dimension finie possède une base $\mathscr{B}_1$. $\mathscr{B}_1$ est une famille libre de E donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille $\mathscr{B}_2$ telle que $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ soit une base de E.

   Si on pose alors $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_2)$, on a $E = F \oplus G$ d'aprèsl e théorème 6 : G est un supplémentaire de F.
2. Avec les mêmes notations, on a
$$\dim E = \mathrm{card}\,(\mathscr{B}_1) \cup \mathscr{B}_2) = \mathrm{card}(\mathscr{B}_1) + \mathrm{card}(\mathscr{B}_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$
3. Ce dernier point a déjà été vu (théorème 6) et n'est ici que pour rappel.

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \ .$$

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \ .$$

Démonstration

Tout d'abord, si G_1 (resp. G_2) est une partie génératrice finie de E_1 (resp. E_2), alors, puisque $E_1 + E_2 = \text{Vect}\big(E_1 \cup E_2\big)$, $G_1 \cup G_2$ est une partie génératrice finie de $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Démontrons maintenant la formule.

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \ .$$

Démonstration

Tout d'abord, si G_1 (resp. G_2) est une partie génératrice finie de E_1 (resp. E_2), alors, puisque $E_1 + E_2 = \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$, $G_1 \cup G_2$ est une partie génératrice finie de $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Démontrons maintenant la formule.

- Soit E_2' un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 : $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$. D'après le théorème précédent, on a $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E_2'$ $(*)$.

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) .$$

Démonstration

Tout d'abord, si G_1 (resp. G_2) est une partie génératrice finie de E_1 (resp. E_2), alors, puisque $E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(E_1 \cup E_2)$, $G_1 \cup G_2$ est une partie génératrice finie de $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Démontrons maintenant la formule.

- Soit E_2' un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 : $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$. D'après le théorème précédent, on a $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E_2'$ $(*)$.

- Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$.

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \text{ .}$$

Démonstration

Tout d'abord, si G_1 (resp. G_2) est une partie génératrice finie de E_1 (resp. E_2), alors, puisque $E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(E_1 \cup E_2)$, $G_1 \cup G_2$ est une partie génératrice finie de $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.

Démontrons maintenant la formule.

- Soit E_2' un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 : $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$. D'après le théorème précédent, on a $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E_2'$ $(*)$.
- Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$.
  - La somme des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2' est bien directe car $E_1 \cap E_2' = E_1 \cap \left(E_2 \cap E_2'\right) = \left(E_1 \cap E_2\right) \cap E_2' = \{0\}$ (car $E_1 \cap E_2$ et E_2' sont en somme directe).

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) .$$

Démonstration

Tout d'abord, si G_1 (resp. G_2) est une partie génératrice finie de E_1 (resp. E_2), alors, puisque $E_1 + E_2 = \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$, $G_1 \cup G_2$ est une partie génératrice finie de $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Démontrons maintenant la formule.

- Soit E_2' un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 : $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$. D'après le théorème précédent, on a $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E_2'$ $(*)$.

- Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$.
  - La somme des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2' est bien directe car $E_1 \cap E_2' = E_1 \cap \left(E_2 \cap E_2'\right) = \left(E_1 \cap E_2\right) \cap E_2' = \{0\}$ (car $E_1 \cap E_2$ et E_2' sont en somme directe).
  - $E_2' \subset E_2$ donc $E_1 + E_2' \subset E_1 + E_2$.

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \ .$$

Démonstration

Tout d'abord, si G_1 (resp. G_2) est une partie génératrice finie de E_1 (resp. E_2), alors, puisque $E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(E_1 \cup E_2)$, $G_1 \cup G_2$ est une partie génératrice finie de $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Démontrons maintenant la formule.

- Soit E_2' un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 : $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$. D'après le théorème précédent, on a $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E_2'$ $(*)$.

- Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$.
  - La somme des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2' est bien directe car $E_1 \cap E_2' = E_1 \cap \left(E_2 \cap E_2'\right) = \left(E_1 \cap E_2\right) \cap E_2' = \{0\}$ (car $E_1 \cap E_2$ et E_2' sont en somme directe).
  - $E_2' \subset E_2$ donc $E_1 + E_2' \subset E_1 + E_2$.
  - Soit $x \in E_1 + E_2$: $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$ pour $i = 1, 2$. Puisque $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$, on a $x_2 = y + x_2'$ avec $y \in E_1 \cap E_2$ et $x_2' \in E_2'$.
    D'où $x = \underbrace{(x_1 + y)}_{\in E_1} + x_2' \in E_1 + E_2'$. Ainsi, $E_1 + E_2 \subset E_1 + E_2'$, d'où l'égalité.

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)\ .$$

Démonstration

Tout d'abord, si G_1 (resp. G_2) est une partie génératrice finie de E_1 (resp. E_2), alors, puisque $E_1 + E_2 = \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$, $G_1 \cup G_2$ est une partie génératrice finie de $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Démontrons maintenant la formule.

- Soit E_2' un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 : $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$. D'après le théorème précédent, on a $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E_2'$ $(*)$.
- Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$.
  - La somme des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2' est bien directe car $E_1 \cap E_2' = E_1 \cap \left(E_2 \cap E_2'\right) = \left(E_1 \cap E_2\right) \cap E_2' = \{0\}$ (car $E_1 \cap E_2$ et E_2' sont en somme directe).
  - $E_2' \subset E_2$ donc $E_1 + E_2' \subset E_1 + E_2$.
  - Soit $x \in E_1 + E_2$: $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$ pour $i = 1, 2$. Puisque $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$, on a $x_2 = y + x_2'$ avec $y \in E_1 \cap E_2$ et $x_2' \in E_2'$.
  D'où $x = \underbrace{(x_1 + y)}_{\in E_1} + x_2' \in E_1 + E_2'$. Ainsi, $E_1 + E_2 \subset E_1 + E_2'$, d'où l'égalité.
- Ainsi $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$ d'où, d'après $(*)$:
$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2' = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \ .$$

Corollaire important :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires, il faut et il suffit que :

$$E_1 + E_2 = E \textbf{ et } \dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$$

ou

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \textbf{ et } \dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$$

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) .$$

Corollaire important :

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
> Pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires, il faut et il suffit que :
>
> $$E_1 + E_2 = E \textbf{ et } \dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$$
>
> ou
>
> $$E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \textbf{ et } \dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$$

Démonstration

C'est immédiat avec la formule de Grassmann.
Par exemple, si on a $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$, cette formule donne $\dim(E_1 + E_2) = \dim E$ donc $E_1 + E_2 = E$ et par suite $E_1 \oplus E_2 = E$.

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \ .$$

Corollaire important :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires, il faut et il suffit que :

$$E_1 + E_2 = E \ \textbf{et} \ \dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$$

ou

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \ \textbf{et} \ \dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$$

Corollaire:

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

Théorème 14: *Formule de Grassmann*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)\ .$$

Corollaire important :

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
> Pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires, il faut et il suffit que :
>
> $$E_1 + E_2 = E \textbf{ et } \dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$$
>
> ou
>
> $$E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \textbf{ et } \dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$$

Corollaire:

> Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et
>
> $$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

Démonstration

Le cas $n = 2$ découle de la formule de Grassmann. Il suffit ensuite de faire une banale récurrence..

Le résultat qui suit est une application importante de la formule de Grassmann.

Il ne figure pas en tant que tel dans le programme, mais est souvent utile, donc il faut en connaître une démonstration (on en verra une autre, plus élégante, dans quelque temps).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E (on rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$).

Alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Le résultat qui suit est une application importante de la formule de Grassmann.

Il ne figure pas en tant que tel dans le programme, mais est souvent utile, donc il faut en connaître une démonstration (on en verra une autre, plus élégante, dans quelque temps).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E (on rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$).

Alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Démonstration

- On a : $H_1 \subset H_1 + H_2$, donc $\dim(H_1 + H_2) \geqslant \dim H_1 = n - 1$.

Le résultat qui suit est une application importante de la formule de Grassmann.

Il ne figure pas en tant que tel dans le programme, mais est souvent utile, donc il faut en connaître une démonstration (on en verra une autre, plus élégante, dans quelque temps).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E (on rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$).

Alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Démonstration

- On a : $H_1 \subset H_1 + H_2$, donc $\dim(H_1 + H_2) \geqslant \dim H_1 = n-1$.
  Si l'on avait $\dim(H_1 + H_2) = n-1$ on aurait $H_1 + H_2 = H_1$ c'est-à-dire $H_2 \subset H_1$ d'où $H_1 = H_2$ (car mêmes dimensions), c'est exclu.

Le résultat qui suit est une application importante de la formule de Grassmann.

Il ne figure pas en tant que tel dans le programme, mais est souvent utile, donc il faut en connaître une démonstration (on en verra une autre, plus élégante, dans quelque temps).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E (on rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$).

Alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Démonstration

- On a : $H_1 \subset H_1 + H_2$, donc $\dim(H_1 + H_2) \geqslant \dim H_1 = n - 1$.
  Si l'on avait $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$ on aurait $H_1 + H_2 = H_1$ c'est-à-dire $H_2 \subset H_1$ d'où $H_1 = H_2$ (car mêmes dimensions), c'est exclu.
  Donc $\dim(H_1 + H_2) > n - 1$ soit $\dim(H_1 + H_2) = n$ (autrement dit, $H_1 + H_2 = E$).

Le résultat qui suit est une application importante de la formule de Grassmann.

Il ne figure pas en tant que tel dans le programme, mais est souvent utile, donc il faut en connaître une démonstration (on en verra une autre, plus élégante, dans quelque temps).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E (on rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$).

Alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Démonstration

- On a : $H_1 \subset H_1 + H_2$, donc $\dim(H_1 + H_2) \geqslant \dim H_1 = n - 1$.
  Si l'on avait $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$ on aurait $H_1 + H_2 = H_1$ c'est-à-dire $H_2 \subset H_1$ d'où $H_1 = H_2$ (car mêmes dimensions), c'est exclu.
  Donc $\dim(H_1 + H_2) > n - 1$ soit $\dim(H_1 + H_2) = n$ (autrement dit, $H_1 + H_2 = E$).
- La formule de Grassmann donne alors :
  $$\dim E = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$
  donc $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim E = (n-1) + (n-1) - n = n - 2$.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E telle que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe. Alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E telle que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe. Alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Démonstration

Récurrence facile car, d'après la proposition 6, si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe, alors la somme $\sum_{i=1}^{n-1} E_i$ est directe et la somme de E_n et de $\sum_{i=1}^{n-1} E_i$ est aussi directe.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E telle que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe. Alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Proposition 11

S oit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que **la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe**. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E telle que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe. Alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\dim(E_i).$$

Proposition 11

S oit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que **la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe**. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^{n}\dim(E_i).$$

Démonstration

- $\Longrightarrow$ découle du résultat précédent.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E telle que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe. Alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Proposition 11

S oit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que **la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe**. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Démonstration

- $\Longrightarrow$ découle du résultat précédent.
- $\Longleftarrow$: Si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$, posons $F = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$ d'après le résultat précédent, d'où $F = E$.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E telle que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe. Alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Proposition 11

S oit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que **la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe**. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Proposition 12

S oit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E **telle que $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$**. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Démonstration

• $\Longrightarrow$: déjà fait ci-dessus.

Démonstration

- $\Longrightarrow$: déjà fait ci-dessus.
- $\Longleftarrow$: On procède par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence s'écrit :

$$(\mathscr{H}_n) \ : \ \text{si } E = \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ et } \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i) \text{ alors } E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

Démonstration

- $\Longrightarrow$: déjà fait ci-dessus.
- $\Longleftarrow$: On procède par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence s'écrit :

$$(\mathscr{H}_n) \ : \ \text{si } E = \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ et } \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i) \text{ alors } E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

  - $(\mathscr{H}_n)$ est vérifiée pour $n = 1$ (évident) et $n = 2$ (déjà fait).

Démonstration

- $\Longrightarrow$: déjà fait ci-dessus.
- $\Longleftarrow$: On procède par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence s'écrit :

$$(\mathscr{H}_n) \quad : \quad \text{si } E = \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ et } \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i) \text{ alors } E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

  - $(\mathscr{H}_n)$ est vérifiée pour $n = 1$ (évident) et $n = 2$ (déjà fait).
  - Supposons $(\mathscr{H}_{n-1})$ vérifiée et supposons $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ avec $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

    On a $E = \sum_{i=1}^{n-1} E_i + E_n$ donc, d'après la formule de Grassmann, $\dim E \leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) + \dim E_n$, avec égalité si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) \cap E_n = \{0\} \quad (*)$

Démonstration

- $\Longrightarrow$: déjà fait ci-dessus.
- $\Longleftarrow$: On procède par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence s'écrit :

$$(\mathscr{H}_n) \ : \ \text{si } E = \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ et } \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i) \text{ alors } E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

  - $(\mathscr{H}_n)$ est vérifiée pour $n = 1$ (évident) et $n = 2$ (déjà fait).
  - Supposons $(\mathscr{H}_{n-1})$ vérifiée et supposons $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ avec $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

    On a $E = \sum_{i=1}^{n-1} E_i + E_n$ donc, d'après la formule de Grassmann, $\dim E \leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) + \dim E_n$, avec égalité si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) \cap E_n = \{0\} \quad (*)$

    Or on sait que $\dim\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \dim E_i$ et que $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$. L'inégalité ci-dessus est donc une égalité, et on a donc $\dim\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \dim E_i$. D'après $(\mathscr{H}_{n-1})$, la somme $\sum_{i=1}^{n-1} E_i$ est directe.

Démonstration

- $\Longrightarrow$: déjà fait ci-dessus.
- $\Longleftarrow$: On procède par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence s'écrit :

$$(\mathscr{H}_n) \;:\; \text{si } E = \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ et } \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i) \text{ alors } E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

- $(\mathscr{H}_n)$ est vérifiée pour $n = 1$ (évident) et $n = 2$ (déjà fait).
- Supposons $(\mathscr{H}_{n-1})$ vérifiée et supposons $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ avec $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

  On a $E = \sum_{i=1}^{n-1} E_i + E_n$ donc, d'après la formule de Grassmann, $\dim E \leqslant \dim \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) + \dim E_n$, avec égalité si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) \cap E_n = \{0\} \quad (*)$

  Or on sait que $\dim \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \dim E_i$ et que $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$. L'inégalité ci-dessus est donc une égalité, et on a donc $\dim \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \dim E_i$. D'après $(\mathscr{H}_{n-1})$, la somme $\sum_{i=1}^{n-1} E_i$ est directe.

  On a aussi $(*)$: $\left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i \right) \cap E_n = \{0\}$, donc la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe d'après la proposition 6. Cela démontre $(\mathscr{H}_n)$.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$

$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$

$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$;

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$

$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$,

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

  De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

  De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

  On pouvait bien sûr démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant la caractérisation habituelle :

  - F est bien inclus dans E, par définition ;
  - Le polynôme nul appartient à F puisqu'il s'annule en $0, 1, 2$, donc F est non vide ;
  - Si P, Q sont dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

    $$\forall\, i \in \{0, 1, 2\}\ ,\ (\lambda P + Q)(i) = \lambda P(i) + Q(i) = \lambda.0 + 0 = 0\ ,$$

    donc $\lambda P + Q \in F$.

  Mais il fallait de toutes façons faire ce qui précède pour trouver la dimension...

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

  De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

  Pour les 5/2 : on pouvait aussi remarquer que F est l'intersection des noyaux des trois formes linéaires $\varphi_i : P \mapsto P(i)$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, donc c'est un sous-espace vectoriel de E, puis vérifier que ces trois formes linéaires sont indépendantes, ce qui donne $\dim F = \dim \mathbb{R}_3[X] - 3 = 1$.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

  De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

- H est l'ensemble des polynômes pairs de degré $\leqslant 3$, donc de la forme $a + bX^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; il s'agit donc du plan vectoriel engendré par les polynômes 1 et X^2.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

  De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

- H est l'ensemble des polynômes pairs de degré $\leqslant 3$, donc de la forme $a + bX^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; il s'agit donc du plan vectoriel engendré par les polynômes 1 et X^2.

- Puisque $\dim F + \dim G + \dim H = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, pour montrer que ces 3 sous-espaces vectoriels sont supplémentaires il suffit de montrer que leur somme est directe.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

  De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.
- H est l'ensemble des polynômes pairs de degré $\leqslant 3$, donc de la forme $a + bX^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; il s'agit donc du plan vectoriel engendré par les polynômes 1 et X^2.
- Puisque $\dim F + \dim G + \dim H = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, pour montrer que ces 3 sous-espaces vectoriels sont supplémentaires il suffit de montrer que leur somme est directe.
- Pour cela on considère 3 polynômes $P \in F$, $Q \in G$ et $R \in H$ tels que $P + Q + R = 0$. Il existe alors des réels λ, μ, a, b tels que : $P = \lambda X(X-1)(X-2)$, $Q = \mu(X-1)(X-2)(X-3)$ et $R = a + bX^2$.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

  De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.
- H est l'ensemble des polynômes pairs de degré $\leqslant 3$, donc de la forme $a + bX^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; il s'agit donc du plan vectoriel engendré par les polynômes 1 et X^2.
- Puisque $\dim F + \dim G + \dim H = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, pour montrer que ces 3 sous-espaces vectoriels sont supplémentaires il suffit de montrer que leur somme est directe.
- Pour cela on considère 3 polynômes $P \in F$, $Q \in G$ et $R \in H$ tels que $P + Q + R = 0$. Il existe alors des réels λ, μ, a, b tels que : $P = \lambda X(X-1)(X-2)$, $Q = \mu(X-1)(X-2)(X-3)$ et $R = a + bX^2$.

  Il est alors facile de montrer que la relation

  $$\lambda X(X-1)(X-2) + \mu(X-1)(X-2)(X-3) + a + bX^2 = 0$$

  implique $\lambda = \mu = a = b = 0$ (prendre $X = 1$ puis $X = 2$ etc...) soit $P = Q = R = 0$: CQFD.

Exercice

On définit les trois ensembles suivants dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in E \mid P(0 = P(1) = P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad ,$$
$$\text{et} \quad H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

- Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

  De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

- H est l'ensemble des polynômes pairs de degré $\leqslant 3$, donc de la forme $a + bX^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; il s'agit donc du plan vectoriel engendré par les polynômes 1 et X^2.

- Puisque $\dim F + \dim G + \dim H = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, pour montrer que ces 3 sous-espaces vectoriels sont supplémentaires il suffit de montrer que leur somme est directe.

- Pour cela on considère 3 polynômes $P \in F$, $Q \in G$ et $R \in H$ tels que $P + Q + R = 0$. Il existe alors des réels λ, μ, a, b tels que : $P = \lambda X(X-1)(X-2)$, $Q = \mu(X-1)(X-2)(X-3)$ et $R = a + bX^2$.

  Il est alors facile de montrer que la relation

  $$\lambda X(X-1)(X-2) + \mu(X-1)(X-2)(X-3) + a + bX^2 = 0$$

  implique $\lambda = \mu = a = b = 0$ (prendre $X = 1$ puis $X = 2$ etc...) soit $P = Q = R = 0$: CQFD.

- On pouvait aussi montrer que la réunion de bases de ces 3 sous-espaces vectoriels, c'est-à-dire la famille $\left\{X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2)(X-3), 1, X^2\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$; pour cela il suffit de démontrer qu'elle est libre (4 vecteurs en dimension 4), ce qui revient au calcul précédent.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

Si $\dim\left(\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right)$ est finie, elle s'appelle le rang de la famille $(x_i)_{i\in I}$, noté $\mathrm{rg}\left((x_i)_{i\in I}\right)$.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
Si $\dim\left(\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right)$ est finie, elle s'appelle le rang de la famille $(x_i)_{i\in I}$, noté $\mathrm{rg}\left((x_i)_{i\in I}\right)$.

Proposition 13

1. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors :
$$\mathrm{rg}\big((x_i)_{i\in I}\big) \leqslant \dim(E).$$

Rang d'une famille de vecteurs

Définition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
Si $\dim\left(\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right)$ est finie, elle s'appelle le rang de la famille $(x_i)_{i\in I}$, noté $\mathrm{rg}\left((x_i)_{i\in I}\right)$.

Proposition 13

1. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors :
$$\mathrm{rg}\big((x_i)_{i\in I}\big) \leqslant \dim(E).$$
2. Si $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une famille finie, alors : $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) \leqslant p$.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
Si $\dim\left(\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right)$ est finie, elle s'appelle le <u>rang</u> de la famille $(x_i)_{i\in I}$, noté $\mathrm{rg}\left((x_i)_{i\in I}\right)$.

Proposition 13

1. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors :
$$\mathrm{rg}\big((x_i)_{i\in I}\big) \leqslant \dim(E).$$
2. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une famille finie, alors : $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p$.

Démonstration

1. Découle du fait que la dimension de $\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)$ est forcément inférieure ou égale à celle de E.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
Si $\dim\left(\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right)$ est finie, elle s'appelle le rang de la famille $(x_i)_{i\in I}$, noté $\mathrm{rg}\left((x_i)_{i\in I}\right)$.

Proposition 13

1. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors :
$$\mathrm{rg}\big((x_i)_{i\in I}\big) \leqslant \dim(E).$$
2. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une famille finie, alors : $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p$.

Démonstration

1. Découle du fait que la dimension de $\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)$ est forcément inférieure ou égale à celle de E.
2. Puisque $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\left((x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\right)$, son cardinal p est supérieur à la dimension de cet espace, c'est-à-dire à $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

FIN DU CHAPITRE I